



**Ministère de l'enseignement supérieure  
et de la recherche scientifique**

**Université Mohamed Boudiaf - M'sila**

**Faculté de technologie**



**Département de GENIE CIVIL**

**MEMOIRE**

**Présenté pour l'obtention du diplôme de  
MASTER**

**FILIERE : Génie Civil**

**SPECIALITE : STRUCUTRE**

**THEME**

**Etude de l'effet de la discrétisation et la  
modélisation matérielle sur le comportement  
d'une poutre simplement appuyée en béton.**

**Dirigé par :  
Mr. AMOUR Ahmed**

**Présenté par :  
DELLADJA Rawiya**

**Promotion : 2014/2015.**

# *Dédicace*

Je rends un grand hommage :

A travers ce modeste travail, en signe de respect et de reconnaissance envers :

Ma Mère.

Mon père.

Pour tous les sacrifices et leur soutien moral et matériel dont ils ont fait preuve pour que je réussisse.

Je dédie également à :

Mes grandes mères.

Mes grands-pères.

Mes frères et ses maries.

Ma petite sœur.

Mes oncles et mes tantes.

Mon petit ange Anes wassim.

Ainsi qu'à toute ma famille et tous mes amis.

En un mot, à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à ma formation.

# *REMERCIEMENTS*

Nous tenons dans un premier temps à remercier DIEU tout puissant de nous avoir donné la chance et le privilège d'étudier et de nous avoir permis d'en arriver là.

Je remercie mes très chers parents pour leurs soutiens et leur patience.

Nous adressons nos vifs remerciements à nos encadrateurs : Mr AMOUR.A ; qui s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi que pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements aux membres du jury qui ont accepté d'examiner mon travail.

Nous adressons également notre profonde gratitude à tous les professeurs de l'université Med BOUDAIF en particulier ceux du département de GENIE CIVIL.

Enfin, nous remercions toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

***MERCI.***

# SOMMAIRE

*Introduction générale .....	(01)
<b>CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS.</b>	
I.1-INTRODUCTION.....	(0 3)
I.2-Principe général de la MEF.....	(04)
I.2.1-Démarche éléments finis .....	(05)
I.2.2-Discretisation géométrique.....	(05)
I.2.3-Approximation nodale .....	(06)
I.2.4-Construction d'une approximation nodale linéaire .....	(06)
I.2.4.1-Bases polynomiales complètes .....	(06)
I.2.4.2-Bases polynomiales incomplètes .....	(07)
I.2.5-Construction des fonctions d'interpolation d'un élément triangulaire .....	(07)
I.2.5.1-Approximation nodale de quelques éléments de référence .....	(07)
I.2.5.2-Éléments à une dimension .....	(07)
I.2.5.3-Élément triangulaire .....	(08)
I.2.5.4-Élément à deux dimensions rectangulaires .....	(09)
I.2.5.5-Quantités élémentaires .....	(10)
I.2.5.6-Matrices masse et raideur .....	(10)
I.2.5.7-Efforts imposés .....	(11)
I.2.5.8-Efforts inconnus .....	(11)
I.2.6-Structure élastique de symétrie cylindrique .....	(12)
I.2.6.1-Assemblage et conditions aux limites.....	(12)
I.2.6.2-Matrices.....	(12)
I.2.6.3-Efforts imposés .....	(12)
I.2.6.4-Efforts inconnus .....	(12)
I.2.7-Utilisation d'un logiciel .....	(13)
I.2.8-Déroulement d'une étude .....	(13)
I.2.8.1-Analyse du problème .....	(13)
I.2.8.2-Choix du modèle .....	(13)
I.2.8.3-Choix du type d'éléments.....	(13)
I.2.8.4-Choix du maillage .....	(14)
I.2.8.5-Hypothèses de comportement.....	(14)
I.2.8.6-Création et vérification des données .....	(14)
I.2.8.7-Exécution du calcul .....	(14)
I.3-L'étude théorique de modèle poutre .....	(15)
I.3.1-Modèle poutre en flexion .....	(15)
I.3.2- Approximation nodale.....	(16)
I.3.3-Matrice raideur et masse.....	(17)
I.3.4-vecteur force généralisé.....	(18)
I.4- Conclusion.....	(19)
<b>Chapitre II : LA DISCRÉTISATION LA MODÉLISATION.</b>	
II.1-LA DISCRÉTISATION .....	(20)
II.1.1- INTRODUCTION .....	(20)
II.1.2-Approximation nodale par sous-domaines .....	(21)
II.1.3-Approximation nodale par éléments finis.....	(21)
II.1.4-Règles de partition du domaine en éléments .....	(22)
II.1.5-Erreur de discrétisation géométrique .....	(22)
II.2-LA MODÉLISATION .....	(23)
II.2.1- Déduction de la matrice de rigidité pour l'élément de poutre .....	(24)
a) Méthode directe .....	(24)

b) Procédure formelle.....	(26)
II.2.2-Systèmes de coordonnées globales et locales .....	(27)
II.2.3-Propriétés de la matrice de rigidité .....	(27)
<b>CHAPITRE III : GÉNÉRALITÉ SUR LA FONCTION D'AIRY.</b>	
III.1- Introduction sur Fonction d' Airy .....	(27)
III.1.1-Equation de compatible.....	(27)
III.1.2-Equation de compatibilité en termes de contraintes ou équation de BELTRAN-MICHEL .....	(28)
III.2-Flexion simple d'une poutre rectangulaire.....	(31)
III.3-Application de la fonction d'AIRY sur le modèle proposé .....	(34)
<b>CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODÈLE PROPOSÉ.</b>	
IV.1-INTRODUCTION .....	(37)
IV.2-Généralité sur le logiciel de la simulation .....	(38)
IV.3-Les principales étapes de la simulation .....	(39)
IV.3.1-Définir l'objectif.....	(39)
IV.3.2-Choisir une théorie et des modèles de comportements .....	(39)
IV.3.3-Choisir un solveur .....	(39)
IV.3.4-Modéliser le produit .....	(39)
IV.3.5-Modéliser l'action de l'environnement sur le produit .....	(40)
IV.3.6-Calculer .....	(40)
IV.3.7-Valider ou diagnostiquer .....	(40)
IV.3.8-Bilan .....	(41)
IV.4- présentation de travail .....	(41)
IV.5- caractéristique des matériaux .....	(42)
IV.5.1. Le béton .....	(42)
IV.5.1.1. La Résistance Caractéristique du Béton .....	(42)
IV.5.1.2. Déformation longitudinale du béton .....	(42)
IV.5.1.3. Diagramme déformations –contraintes du béton simulé .....	(43)
IV.6- la modélisation du modèle proposé .....	(44)
IV.6.1-INTRODUCTION.....	(44)
IV.6.2-Définition du problème- <i>postprocessing</i> .....	(46)
IV.6.1.1-Titre.....	(47)
IV.6.1.2-Création de la géométrie du modèle.....	(48)
IV.6.1.3-Définir type d'éléments.....	(48)
IV.6.1.4-Propriété des matériaux.....	(48)
IV.6.1.5-Attribution des propriétés de chaque élément.....	(49)
IV.6.1.6-Maillage.....	(49)
IV.6.1.7-Solution.....	(54)
IV.6.1.7.1-Type d'analyse.....	(54)
IV.6.1.7.2-Conditions aux limites.....	(54)
IV.6.1.8 –Application des charges.....	(54)
IV.6.1.9-résolution du système .....	(55)
IV.6.1.10-Les résultats obtenus( <i>Postprocessing</i> ) .....	(55)
IV.6.1.10.1-forme de déformée .....	(55)
IV.6.1.10.2-Contraintes .....	(56)
IV.7-Conclusion.....	(56)
<b>CHAPITRE V : INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS OBTENUS.</b>	
V.1-INTRODUCTION .....	(57)
V.2-LES RESULTATS OBTENUS .....	(57)
*Conclusion générale.....	(64)
*Références bibliographique.....	(65)

# LISTE DES FIGURES

## Chapitre I :

Figure I.1 : milieu continu (domaine spatial).....	(03)
Figure I.2 : milieu discret (maille).....	(03)
Figure I.3 : Deux maillages plans avec leurs nœuds.....	(03)
Figure I.4 : Quelques types d'éléments bidimensionnels courants.....	(03)
Figure I.5 : Quelques types d'éléments 3 dimensionnels courants.....	(04)
Figure I.6 : Erreur de discrétisation géométrique.....	(06)
Figure I.7 : Fonctions de forme à une dimension.....	(08)
Figure I.8 : Fonctions d'interpolation linéaires du triangle.....	(08)
Figure I.9 : Fonctions d'interpolation quadratiques du triangle. Les autres sont obtenues par rotation.....	(09)
Figure I.10 : Fonction d'interpolation N1 du quadrangle. Les autres sont obtenues par rotation.....	(09)
Fig I.11 : la flexion d'une poutre.....	(15)
Fig I.12 : section droite en G.....	(15)
Fig I.13 : les contraintes sur la section.....	(16)
Fig I.14 : Les efforts extérieurs.....	(16)
FigI.15: la déformation d'une poutre bi encastree.....	(17)
FigI.16: la déformation d'une poutre encastree à l'extrémité.....	(17)

## Chapitre II :

Fig.II.1: Discrétisation d'une structure en nœuds et éléments (dent d'une roue dentée).....	(20)
Figure II.2 : Vue synthétique des méthodes d'approximation.....	(21)
Fig II.3 : les types de discrétisation.....	(22)
Fig II.4 : les trous entre deux éléments.....	(22)
Fig II.5: les erreurs de discrétisation.....	(22)
FigureII.6 : Processus d'analyse utilisant un modèle numérique.....	(23)
Figure II.7:	
a) Elément de poutre et ses degrés de liberté	
b) Chargements nodaux associés aux degrés de liberté	
c) Formes déviées associées par l'activation de chaque degré de liberté.....	(24)

## Chapitre IV :

Figure IV.1 : Schématisation des sources d'écarts relevant de la modélisation : modélisation continue et discrétisation.....	(37)
Figure IV.2 : Schéma récapitulatif des principales étapes et des principaux concepts de la simulation par éléments finis.....	(41)
Figure IV.3 : schéma de la poutre étudiée.....	(41)
Fig IV.4 : Diagramme contrainte-déformation d'un béton.....	(43)
Fig IV.5 : la poutre étudiée modélisé en 3D.....	(45)
Fig IV.6: la poutre étudiée modélisé en sens Y et Z.....	(45)
Fig IV.7: la poutre étudiée modélisé en sens X et Y.....	(46)
Fig IV.8 : Fenêtre du logiciel ANSYS.....	(46)
Fig IV.9 : Nomination du travail.....	(47)
Fig IV.10 : Enregistrement dans l'ANSYS.....	(47)
Fig IV.11: Définition des volumes.....	(48)
Fig IV.12 : Définition de type d'élément.....	(48)

Fig IV.13 : Définition des propriétés d'un matériau dans le domaine linéaire.....	(49)
Fig IV. 14: Attribution des propriétés d'un élément.....	(49)
Fig IV.15 : Meshtools.....	(50)
Fig IV. 16: Définition du maillage (size controls lines).....	(50)
Fig IV.17 : Définition du maillage (size controls volume).....	(50)
Fig IV.18 : dimensions d'une maille quadratique.....	(51)
Fig IV.19 : la poutre étudiée discrétisé en 3D du 1 <sup>er</sup> modèle .....	(51)
Fig IV.20 : la poutre étudiée discrétisé sens Y Z du 1 <sup>er</sup> modèle .....	(52)
Fig IV.21 : dimensions d'une maille quadratique de 2 <sup>ème</sup> modèle.....	(52)
Fig IV.22 : la poutre étudiée discrétisé en 3D de 2 <sup>ème</sup> modèle.....	(53)
Fig IV.23 : la poutre étudiée discrétisé sens YZ de 2 <sup>ème</sup> modèle.....	(53)
Fig IV.24 : Type d'analyse.....	(54)
Fig IV.25 : Définition de chargement.....	(54)
Fig IV.26 : la poutre étudiée discrétisé sous une charge concentrée sens X et Y.....	(55)
Fig IV.27 : Solve Current Load Step.....	(55)

## Chapitre V :

Fig V.1 : la déformation de la poutre pour 1 <sup>er</sup> modèle de discrétisation.....	(57)
Fig V.2 : les contraintes de déformation de la poutre pour 1 <sup>er</sup> modèle de discrétisation...	(58)
Fig V.3: la déformation de la poutre pour 2 <sup>ème</sup> modèle de discrétisation.....	(58)
Fig V.4 : les contraintes de déformation de la poutre pour 2 <sup>ème</sup> modèle de discrétisation..	(59)
Fig V.5: la déformation de la poutre pour 1 <sup>er</sup> cas.....	(60)
Fig V.6 : les contraintes de déformation de la poutre pour 1 <sup>er</sup> cas.....	(60)
Fig V.7: la déformation de la poutre pour 2 <sup>ème</sup> cas.....	(61)
Fig V.8 : les contraintes de déformation de la poutre pour 2 <sup>ème</sup> cas.....	(61)
Fig V.9: la déformation de la poutre pour 3 <sup>ème</sup> cas.....	(62)
Fig V.10 : les contraintes de déformation de la poutre pour 3 <sup>ème</sup> cas.....	(62)

# LISTE DES TABLEAUX

## Chapitre I :

Tableau I.1 : Principales sources d'erreurs durant le calcul.....(15)

## Chapitre II :

Tableau II.1: une série des types d'éléments finis.....(20)

Tableau II.2 : les fonctions de forme par l'activation du degré de liberté.....(25)

## CHAPITRE IV :

Tableau IV.1 : Dimension du maillage proposé.....(42)

Tableau IV.2 :  $f_{ck}$  proposé.....(42)

## CHAPITRE V :

Tableau V.1 : résultats de l'effet de discrétisation.....(60)

Tableau V.2 : résultats du comportement de la poutre en fonction de ( $f_{ck}$ ).....(63)



# Résumé

Dans cette étude, on a fait un modèle d'élément fini tridimensionnel est présenté par l'utilisation d'un logiciel ANSYS pour simuler une poutre en béton.

L'objectif de ce travail est l'étude de l'effet de la discrétisation (le choix du maillage) et la modélisation matérielle (la variation de valeur du caractéristique  $f_{ck}$ ) sur le comportement d'une poutre en béton simplement appuyée par la méthode des éléments finis à l'aide d'un code industriel de modélisation et de calcul .

Les résultats de cette étude montrent que la déformation et les contraintes de déformation sont fonction de discrétisation en éléments finis, ces dernières augmentent proportionnellement avec l'amélioration de la résistance du béton à la compression ( $f_{ck}$ ).

**Mots clés :** simuler, discrétisation, modélisation, méthode des éléments finis, béton, poutre.

# *Abstract*

In this study, we do a three- dimensional finite element model with plane stress elements is presented using ANSYS software to simulate the beam of concrete.

The objective of this work is the study of effect to the discretization (choice of the mesh) and the modeling material (the change a value of the characteristic  $f_{ck}$ ) the behavior of a simply supported concrete beam by the finite element method using an industrial code modeling and calculation.

The results of this study show that the deformation and deformation stresses are a function of discretization in the finite element recent increase in proportion to the improvement of strength of the concrete compression ( $f_{ck}$ ).

**Key words:** Simulate, discretization, modeling, finite element method, concrete, beam.

# ملخص

في هذه الدراسة لقد تم انجاز نموذج ثلاثي الأبعاد لعنصر محدد باستخدام البرنامج ANSYS لأجل محاكاة روافد خرسانية .

$f_c$  على سلوك الهدف من هذا العمل هو دراسة تأثير التفريد (اختيار التقسيم) والنمذجة للمواد (التغير في قيمة الميزة الروافد الخرسانية ذات مساند بسيطة بطريقة العناصر المحددة وذلك بمساعدة برنامج النمذجة والحساب.

نتائج هذه الدراسة تبين أن التشوه و ضغوط التشوه متناسبة مع التفريد إلى عناصر محددة وهذه الأخيرة تتزايد تناسبيا مع  $f_c$  تحسين قوة ضغط الخرسانة

**الكلمات المفتاحية:** محاكاة, التفريد, النمذجة , طريقة العناصر المحددة, خرسانة, رافدة.

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

## INTRODUCTION :

De tous temps, l'homme a voulu connaître, explorer et comprendre aussi bien son environnement immédiat que lointain avec la biologie, la mécanique, la botanique, l'astronomie et bien d'autres domaines scientifiques.

Pendant longtemps, la science a eu pour objet de répondre à des questions sur des phénomènes observables telles que la chute d'un objet, le cycle des jours et des saisons, le fonctionnement du corps humain, etc ... .

De nos jours, les simulations numériques sont utilisées dans tous les domaines scientifiques et dans d'autres domaines comme l'économie (cf. prévoir le cours des actions en bourse). L'outil numérique permet d'étudier à moindre coût des situations pour lesquelles des expériences seraient trop onéreuses (grand nombre de paramètres) ou tout simplement impossible à réaliser. Il est donc un outil complémentaire indispensable aux essais expérimentaux.

### Problématique :

Pour notre projet de fin d'étude, nous avons choisi d'étudier l'effet de la discrétisation et la modélisation matérielle sur le comportement d'une poutre simplement appuyée en béton.

Ainsi que la mesure des phénomènes de déformation de la poutre et la contrainte déformation du béton n'est pas simple à évaluer, c'est pour cela nous avons choisi la procédure numérique pour l'étude du comportement du modèle proposé en utilisant la méthode des éléments finis.

### L'objectif :

Notre choix vise les buts suivants :

- L'étude de comportement d'une poutre en béton (flèche, les contraintes de déformation,.....etc) par la méthode des éléments finis (MEF).
- Résoudre des problèmes mécaniques et physiques par la fonction d'AIRY.
- Maîtriser les concepts de base de la modélisation et la simulation numérique par le code industriel ANSYS version 12.
- Interpréter les résultats d'une simulation numérique et la résolution du problème par la fonction d'AIRY.

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

## Organisation du travail :

Pour traiter ce sujet de recherche, nous avons choisi la méthodologie suivante :

- I. Au 1<sup>er</sup> chapitre : nous avons fait une étude bibliographique sur la méthode des éléments finis et le principe de cette méthode.
- II. Au 2<sup>ème</sup> chapitre : nous avons fait une étude bibliographique sur la discrétisation et la modélisation.
- III. Au 3<sup>ème</sup> chapitre : donner des généralités sur la résolution des problèmes mécaniques et physiques par la fonction d'AIRY.
- IV. Au 4<sup>ème</sup> chapitre : nous procédons à une simulation numérique par élément finis du comportement de le modèle proposé, et nous présentons tous d'abord les étapes de la modélisation.
- V. Au 5<sup>ème</sup> chapitre : nous avons fait une interprétation des résultats obtenus.

Enfin, nous achevons le mémoire par une conclusion générale pour ressortir tous les résultats importants de ce mémoire de fin d'études.

# CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

## Chapitre I : GÉNÉRALITÉ SUR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS.

### I.1-INTRODUCTION :

La MÉF est une manière numérique de résoudre certains des problèmes de physique. C'est une méthode qui permet de déterminer une solution approchée sur un domaine spatial, c'est-à-dire qui permet de calculer un champ (de scalaires, de vecteurs, de tenseurs) qui correspond à certaines équations et à certaines conditions imposées (conditions aux limites).

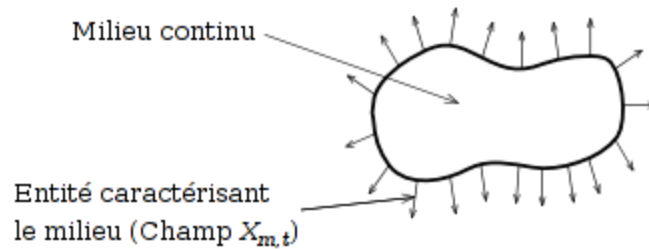


Figure I.1 : milieu continu (domaine spatial).

La méthode consiste à découper le domaine spatial en petits éléments (par morceau), également appelés mailles, et à rechercher une formulation simplifiée du problème sur chaque élément, c'est-à-dire à transformer le système d'équations quelconque en un système d'équations linéaires.

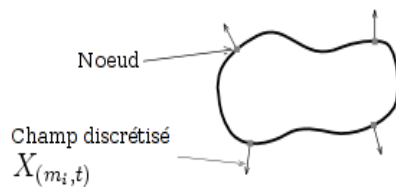


Figure I.2 : milieu discret (maille)

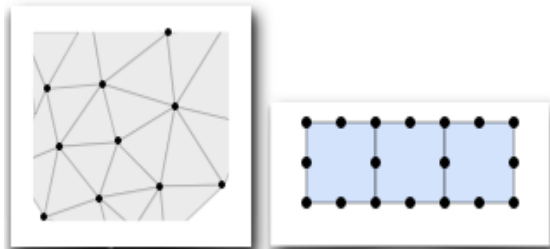


Figure I.3 : Deux maillages plans avec leurs nœuds.

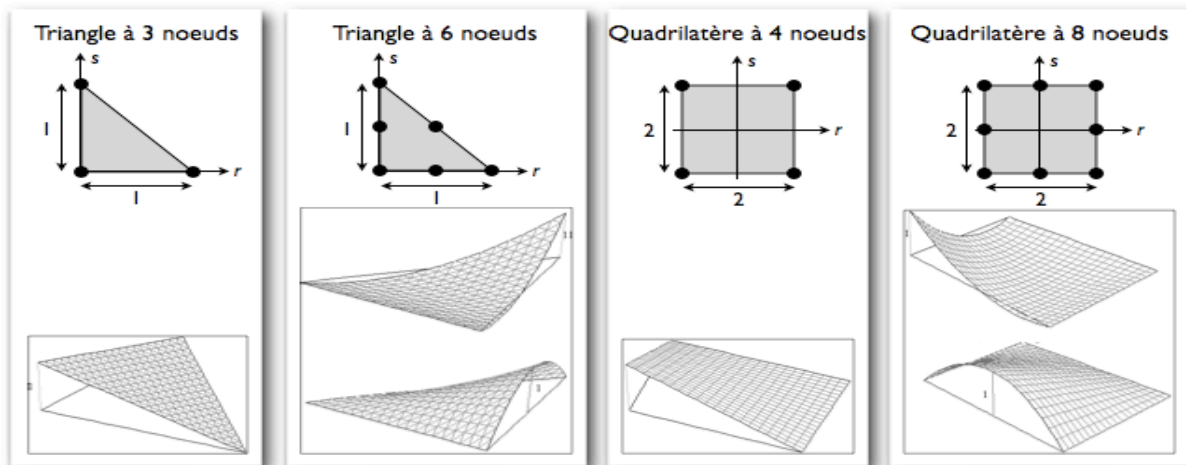


Figure I.4 : Quelques types d'éléments bidimensionnels courants.

# CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

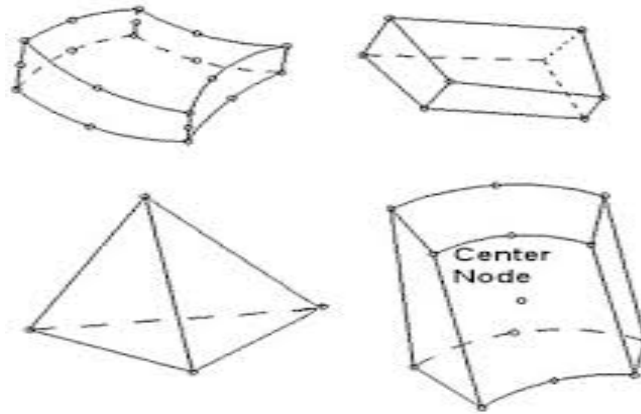


Figure 1.5 : Quelques types d'éléments 3 dimensionnels courants.

Chaque système d'équations linéaires peut se représenter par la forme matricielle suivante :

$$[K] \{U\} = \{F\}$$

$[K]$  - matrice caractérisant le système

$\{U\}$  - variables inconnues du problème

$\{F\}$  - sollicitations connues (second membre)

Les systèmes d'équations pour tous les éléments sont ensuite rassemblés, ce qui forme une grande matrice ; la résolution de ce système global donne la solution approchée au problème.

L'utilisation d'un ordinateur est absolument obligatoire. [1]

## I.2-Principe général de la MEF:

Les codes éléments finis font maintenant partie des outils couramment utilisés lors de la conception et à l'analyse des produits industriels. Les outils d'aide à la modélisation devenant de plus en plus perfectionnés, l'utilisation de la méthode des éléments finis s'est largement développée et peut sembler de moins en moins une affaire de spécialistes. Si l'utilisation de la méthode se démocratise de par la simplicité croissante de mise en œuvre, la fiabilité des algorithmes et la robustesse de la méthode, il reste néanmoins des questions essentielles auxquelles l'ingénieur devra répondre s'il veut effectuer une analyse par éléments finis dans de bonnes conditions :

- formaliser les non-dits et les réflexions qui justifient les choix explicites ou implicites de son analyse du problème.
- Évaluer la confiance qu'il accorde aux résultats produits.
- Analyser les conséquences de ces résultats par rapport aux objectifs visés.

L'objectif de cette partie est de présenter les principes de base de cette méthode en insistant sur l'enchaînement des tâches (démarche et hypothèses associées) qui assurent la cohérence du processus de calcul. Ces connaissances vous seront utiles pour maîtriser les deux principales difficultés de mise au point d'un modèle numérique :

- Problèmes préliminaires à la phase de calcul.
- Problèmes liés à l'exploitation des résultats et le retour à la conception.

# CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

Il ne faut pas perdre de vue que l'analyse des résultats nécessite une bonne compréhension des différentes étapes mathématiques utilisées lors de l'approximation, pour pouvoir estimer l'erreur du modèle numérique par rapport à la solution exacte du problème mathématique.

Sans oublier que le modèle numérique ne peut fournir que de résultats relatifs aux informations contenues dans le modèle mathématique qui découle des hypothèses de modélisation.

Nous nous limiterons à la présentation de modèles élémentaires utilisés dans le cadre des théories linéaires. Bien que simples ces modèles permettent déjà de traiter un grand nombre d'applications liées aux problèmes de l'ingénieur. Du point de vue pédagogique, ils sont suffisamment complexes pour mettre en avant les difficultés de mise en œuvre de la méthode.

L'idée fondamentale de cette méthode est de discrétiser le problème en décomposant le domaine matériel à étudier en éléments de forme géométrique simple. Sur chacun de ces éléments il sera plus simple de définir une approximation nous permettant d'appliquer les méthodes (Méthode des résidus pondérés (méthode de collocation par point, méthode de Galerkin), Méthodes variationnelles). Il ne reste alors qu'à assembler les formes matricielles élémentaires pour obtenir les équations relatives à la structure à étudier. C'est sous cette forme pragmatique qu'elle est utilisée par les ingénieurs, et que nous allons maintenant l'aborder.

## I.2.1-Démarche éléments finis :

Les principales étapes de construction d'un modèle éléments finis, qui sont détaillées par la suite, sont les suivantes :

- Discrétisation du milieu continu en sous domaines.
- Construction de l'approximation nodale par sous domaine.
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème.
- Assemblage des matrices élémentaires.
- prise en compte des conditions aux limites.
- Résolution du système d'équations.

## I.2.2-Discrétisation géométrique :

Cette opération consiste à procéder à un découpage du domaine continu en sous domaines :

$$D = \sum_{e=1}^{ne} D_e \quad \text{tel que} \quad \lim_{e \rightarrow 0} (U D_e) = D$$

Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie souvent complexe du domaine étudié par des éléments de forme géométrique simple. Il ne doit y avoir ni recouvrement ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune.

Lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable. Cette erreur doit être estimée, et éventuellement réduite en modifiant la forme ou en diminuant la taille des éléments concernés comme proposé sur la figure I.6. Sur chaque élément nous allons chercher à définir une approximation de la fonction solution.



# CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

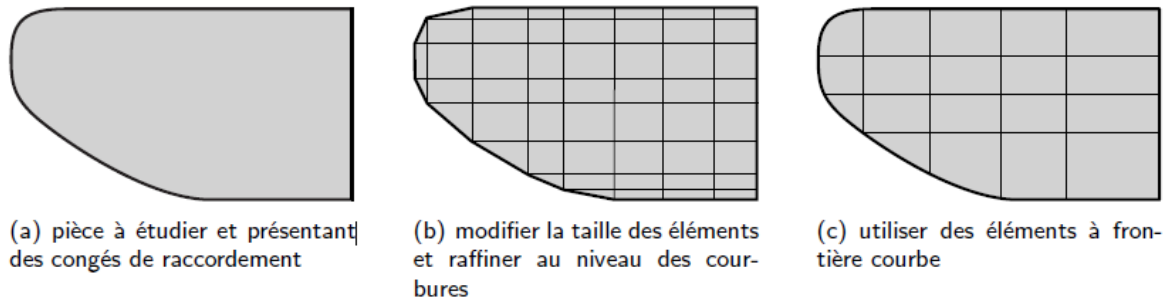


Figure I.6 : Erreur de discrétisation géométrique.

## I.2.3-Approximation nodale :

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation  $u^*$  du champ des variables  $u$  par sous domaine. Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ aux nœuds de l'élément considéré, on parle de représentation nodale de l'approximation ou plus simplement d'approximation nodale.

Dans le cas général le champ à approcher est un champ vectoriel. Nous utilisons alors la notation matricielle suivante  $u^*(M) = \mathbf{N}(M)\mathbf{u}_n$ . Les nœuds  $M_i$  sont des points de l'élément pour lesquels on choisit d'identifier l'approximation  $u^*$  à la valeur du champ de variables  $u$ . Nous en déduisons que :

$$\forall M_i, u^*(M_i) = u_i$$

Soit pour l'approximation nodale :

$$\forall M_i, N_j(M_i) = \delta_{ij}$$

## I.2.4-Construction d'une approximation nodale linéaire :

L'interpolation nodale est construite à partir d'une approximation générale :

$$\forall M, u^*(M) = \Phi(M)\mathbf{a}$$

$\Phi$  est une base de fonctions connues indépendantes, en général une base polynomiale et  $\mathbf{a}$ , le vecteur des paramètres de l'approximation aussi dits paramètres généralisés, qui n'ont pas de signification physique.

### I.2.4.1-Bases polynomiales complètes :

- une dimension
  - Linéaire  $(1, x)$  : deux variables
  - Quadratique  $(1, x, x^2)$  : trois variables
- deux dimensions :
  - Linéaire  $(1, x, y)$  : trois variables
  - Quadratique  $(1, x, y, x^2, xy, y^2)$  : six variables
- trois dimensions :
  - Linéaire  $(1, x, y, z)$  : quatre variables
  - Quadratique  $(1, x, y, z, x^2, xy, y^2, xz, z^2, yz)$  : dix variables.

Pour utiliser une base polynomiale complète, le nombre de termes doit être égal au nombre de variables nodales à identifier. Si l'on ne peut pas utiliser un polynôme complet, le meilleur choix consiste à respecter la symétrie des monômes conservés.

# CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

## I.2.4.2-Bases polynomiales incomplètes :

- deux dimensions : « bi - linéaire »  $(1, x, y, xy)$  : quatre variables
  - trois dimensions : « tri - linéaire »  $(1, x, y, z, xy, xz, yz, xyz)$  : huit variables
- En identifiant aux noeuds l'approximation  $u^*$  à la valeur du champ de variables  $u$ , nous pouvons exprimer les paramètres généralisés  $\mathbf{a}$  en fonction des variables nodales  $\mathbf{u}_n$  :

$$u_n = u^*(M_n) = \Phi(M_n)\mathbf{a}$$

Soit, par inversion du système total :  $\mathbf{a} = \mathbf{T}\mathbf{u}_n$

Pour éviter des erreurs de modèle trop importantes, la matrice à inverser doit être bien conditionnée.

Ce conditionnement est lié au choix de la base polynomiale et à la géométrie des éléments. En reportant ce résultat dans l'approximation nous obtenons la matrice des fonctions d'interpolation :

$$\mathbf{N}(M) = \Phi(M)\mathbf{T}$$

## I.2.5-Construction des fonctions d'interpolation d'un élément triangulaire :

### I.2.5.1-Approximation nodale de quelques éléments de référence :

Un élément de référence est un élément de forme géométrique simple, à frontière rectiligne par exemple, pour lequel l'approximation nodale est construite en suivant la démarche analytique précédente.

Le passage de l'élément de référence à l'élément réel sera réalisé par une transformation géométrique.

Nous entendons par élément réel un élément quelconque du domaine discrétisé.

Deux grandes familles d'éléments sont souvent présentées :

- Les éléments de type Lagrange ;
- Les éléments de type Hermite.

Pour les éléments de type Lagrange, on augmente le nombre de nœuds en conservant une seule variable nodale. Pour les éléments de type Hermite on augmente le nombre de variables nodales, en retenant par exemple les valeurs des dérivées du champ aux nœuds.

L'élément poutre présenté dans le chapitre suivant fait partie de la famille de l'Hermite.

### I.2.5.2-Éléments à une dimension :

La base de fonction linéaire illustrée sur la figure I.7(a) s'écrit avec  $s \in [0, 1]$  :

$$N_1(s) = L_1 = 1 - s, N_2(s) = L_2 = s$$

Cette base est utilisée pour les éléments barres et génère une discontinuité au niveau des champs de déformations et de contraintes au passage d'un élément à son voisin.

# CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

Une base un peu plus riche, constituée de polynômes d'ordre 2 peut aussi être utilisée :

$$N_1(s) = L_1(2L_1 - 1), N_2(s) = 4L_1L_2, N_3(s) = L_2(2L_2 - 1)$$

Ces fonctions de forme sont schématisées sur la figure I.7(b). Le passage à l'ordre supérieur donne la base de la figure I.7(c) où seules  $N_1$  et  $N_2$  sont illustrées : les deux autres fonctions  $N_3$  et  $N_4$  sont respectivement les symétriques de  $N_1$  et  $N_2$  par rapport à  $s = 1/2$ .

$$N_1(s) = \frac{L_1}{2} (3L_1 - 1)(3L_1 - 2) \quad N_2(s) = \frac{9}{2} L_1L_2(3L_1 - 1)$$

$$N_3(s) = \frac{9}{2} L_1L_2(3L_2 - 1) \quad N_4(s) = \frac{L_2}{2} (3L_2 - 1)(3L_2 - 2)$$

L'élément associé est construit avec autre nœuds et une variable par nœud. Il est possible, avec la même base polynomiale, de construire un élément à deux nœuds ayant deux variables par nœud, c'est un élément de type *l'Hermite* illustré sur la figure I.7(d) pour  $N_1$  et  $N_2$  : de la même manière que précédemment, les fonctions  $N_3$  et  $N_4$  se trouvent par symétrie.

Si nous utilisons comme variables nodales le champ et sa dérivée première, nous obtenons les fonctions d'interpolation de l'élément poutre présenté dans la sous-section 3.2.1 :

$$N_1(s) = 1 - 3s^2 + 2s^3 \quad N_2(s) = s - 2s^2 + s^3$$

$$N_3(s) = 3s^2 - 2s^3 \quad N_4(s) = -s^2 + s^3$$

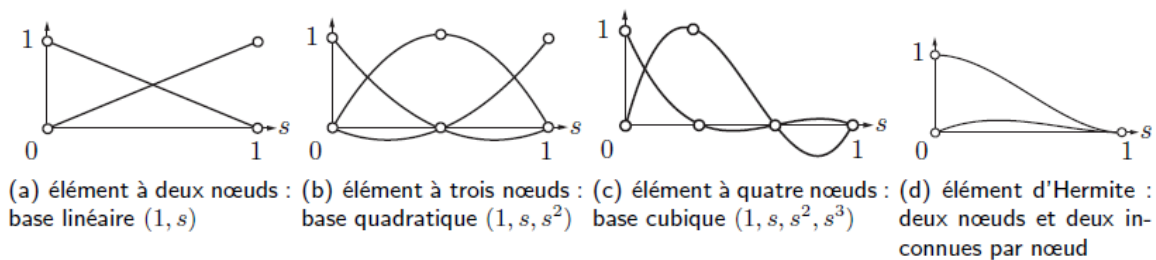


Figure I.7 : Fonctions de forme à une dimension.

## I.2.5.3-Élément triangulaire :

Pour ce type d'élément, l'approximation utilise la base polynomiale linéaire (1, s, t). L'élément de référence, aussi dit *parent*, est un triangle rectangle à trois nœuds de type «T3». L'approximation quadratique quant à elle utilise la base (1, s, t, s<sup>2</sup>, st, t<sup>2</sup>).

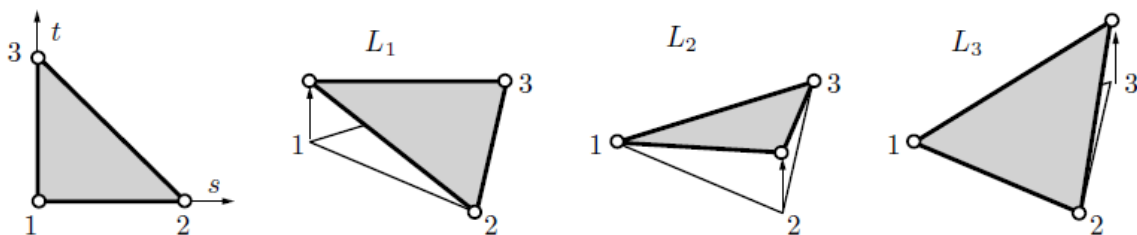


Figure I.8 : Fonctions d'interpolation linéaires du triangle.

L'élément de référence est un triangle rectangle à six nœuds de type « T6 ».

## CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

Posons  $L_1 = 1 - s - t$ ,  $L_2 = s$  et  $L_3 = t$ . Pour :

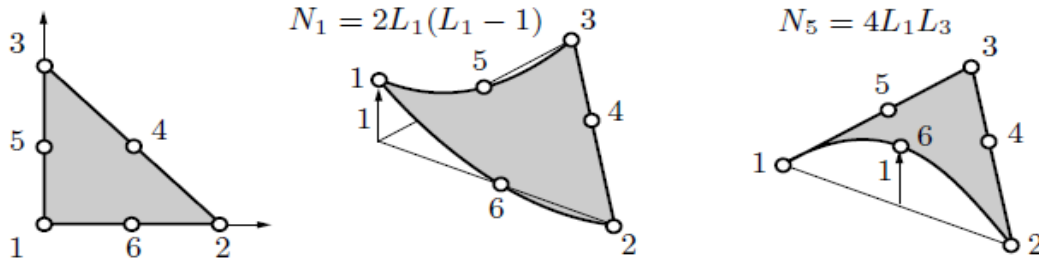
– les trois nœuds sommet  $i = 1, 2, 3$ , les fonctions de forme s'écrivent :

$$N_i = L_i(2L_i - 1)$$

– les trois nœuds d'interface  $i = 1, 2, 3$  :

$$N_{i+3} = 4L_jL_k \quad \text{pour } j \neq i \quad k \neq i, j$$

La figure I.9 donne une représentation de deux des fonctions d'interpolation. Les autres s'obtiennent par permutation des indices.



**Figure I.9 : Fonctions d'interpolation quadratiques du triangle. Les autres sont obtenues par rotation**

### I.2.5.4-Élément à deux dimensions rectangulaires :

L'approximation bilinéaire est déduite de la base polynomiale  $(1, s, t, st)$  sur  $(s, t) \in [-1, 1]$ .

L'élément de référence est un carré à quatre nœuds de type « Q4 ». Les fonctions d'interpolation sont :

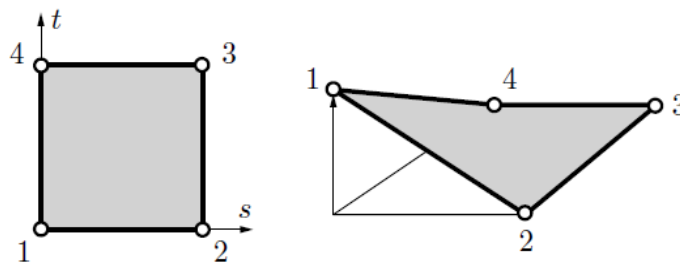
$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - s)(1 - t) \quad N_2 = \frac{1}{4} (1 + s)(1 - t)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + s)(1 + t) \quad N_4 = \frac{1}{4} (1 - s)(1 + t)$$

Sur la figure I.9, seule la fonction  $N_1$  est représentée, les autres s'obtenant par permutation.

De la même façon, on peut construire, à partir d'une base polynomiale complète, les fonctions d'interpolation des éléments rectangulaires à neuf nœuds, pour une approximation quadratique, et à seize nœuds pour une approximation polynomiale cubique.

Ces éléments ont respectivement un et quatre nœuds internes.



**Figure I.10 : Fonction d'interpolation  $N_1$  du quadrangle. Les autres sont obtenues par rotation**

# CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

Du point de vue pratique, on construit des éléments ayant un minimum de nœuds internes, car ces nœuds ne sont pas connectés aux nœuds des autres éléments. On utilise donc des bases polynomiales incomplètes mais symétriques.

Le Q8 est construit à partir de la base  $(1, s, t, s^2, st, t^2, s^2t, st^2)$  et le Q12 est construit à partir de la base  $(1, s, t, s^2, st, t^2, s^3, s^2t, t^2s, t^3, s^3t, st^3)$ .

## I.2.5.5-Quantités élémentaires :

Afin de présenter la démarche générale utilisée pour construire les formes matricielles et vectorielles sur chaque élément, nous utiliserons comme point de départ la forme intégrale du Principe des Travaux Virtuels associée à un problème de mécanique des structures.

Cette forme intégrale est de même type que celles pouvant être déduites des méthodes variationnelles et la généralisation à des problèmes de physique est donc simple.

## I.2.5.6-Matrices masse et raideur :

Soit la forme intégrale du PTV :

$$\forall \delta \vec{u} \int_D \rho \vec{u} \delta \vec{u} dV = - \int_D \vec{\sigma} \delta \vec{\varepsilon} dV + \int_D \vec{f} \delta \vec{u} dV + \int_{\partial D} \vec{T} \delta \vec{u} dS$$

Sur chaque élément nous utilisons l'approximation nodale pour exprimer le champ des déplacements  $\vec{u}$  et le champ des déplacements virtuels  $\delta \vec{u}$ . Ainsi le produit scalaire s'écrit maintenant :

$$\vec{u}(M) = \delta \vec{u}(M) = \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{N}(M)^T \mathbf{N}(M) \mathbf{u}_n$$

D'où le premier terme :

$$\int_{De} \rho \vec{u} \delta \vec{u} dV = \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{M}_e \mathbf{u}_n$$

Avec  $\mathbf{M}_e = \int_{De} \mathbf{N}(M)^T \rho \mathbf{N}(M) dV$ , matrice masse élémentaire. Pour exprimer le second terme les deux tenseurs sont représentés par des vecteurs nous permettant de remplacer le produit doublement contracté par un simple produit scalaire. Ces notations ont été introduites dans la sous-section 1.3.3. Pour un milieu 3D :

$$\vec{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon = [ \varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad 2\varepsilon_{xy} \quad 2\varepsilon_{xz} \quad 2\varepsilon_{yz} ]$$

$$\vec{\sigma} \rightarrow \sigma = [ \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \sigma_{xy} \quad \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} ]$$

De plus le vecteur des déformations s'exprime en fonction du champ des déplacements. Ces relations géométriques font apparaître des opérateurs différentiels appliqués à  $u$ , que nous notons sous forme matricielle :

$$\varepsilon(M) = \mathbf{L}\mathbf{N}(M)\mathbf{u}_n = \mathbf{B}(M)\mathbf{u}_n$$

## CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

Où  $\mathbf{B}$  est la matrice d'opérateurs différentiels appliqués aux fonctions d'interpolation. Les lois de comportement permettent d'exprimer le vecteur des contraintes en fonction du vecteur des déformations, soit :

$$\sigma(M) = \mathbf{D}(M) \varepsilon(M) = \mathbf{D}(M) \mathbf{B}(M) \mathbf{u}_n$$

D'où le second terme, écrit dans la base de discrétisation :

$$\int_{De} \bar{\sigma} \delta \bar{\varepsilon} dV = \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_n$$

Avec  $\mathbf{K}_e = \int_{De} \mathbf{B}(M)^T \mathbf{D}(M) \mathbf{B}(M) dV$  matrice raideur élémentaire. Il nous reste à exprimer le travail virtuel des efforts. En pratique, on considère d'une part les efforts donnés et d'autre part les efforts inconnus qui sont les efforts nécessaires pour assurer les liaisons cinématiques.

Sur chaque élément, nous utilisons l'approximation du champ de déplacement pour exprimer le travail virtuel de ces efforts.

### I.2.5.7-Efforts imposés :

Leur travail virtuel élémentaire est de la forme :

$$\delta T_{de} = \int_{De} \vec{f} \delta \vec{u} dV + \int_{\partial D} \vec{T}_d \delta \vec{u} dS$$

D'où le travail virtuel discrétisé :

$$\delta T_{de} = \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{F}_{de}$$

Avec  $\mathbf{F}_{de} = \int_{De} N(M)^T \vec{f}_d dV + \int_{\partial De} N(M)^T \vec{T}_d dS$  équation dans laquelle  $\vec{f}_d$  et  $\vec{T}_d$  sont écrits dans une base cohérente avec le choix de la discrétisation de  $\delta \mathbf{u}$  et deviennent alors respectivement  $\mathbf{f}_d$  et  $\mathbf{T}_d$ .

### I.2.5.8-Efforts inconnus :

D'une manière similaire, leur travail virtuel élémentaire s'écrit :

$$\delta T_{ie} = \int_{\partial De} \vec{T}_i \delta \vec{u} dS$$

d'où le travail virtuel discrétisé :

$$\delta T_{ie} = \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{F}_{ie}$$

En pratique les efforts inconnus représentent les actions mécaniques extérieures à l'élément considéré. On y trouve les efforts de liaison entre les éléments, et éventuellement pour les éléments de frontière les efforts associés aux liaisons cinématiques de la structure.

# CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

Comme nous le verrons lors de l'assemblage des équations, les nœuds internes non chargés sont des systèmes mécaniques en équilibre, ce qui entraîne que le torseur des actions mécaniques de tous les efforts élémentaires des éléments connectés à un même nœud est nul. Reportons dans la forme intégrale les résultats obtenus pour chaque élément, nous obtenons une équation matricielle de la forme :

$$\forall D_e, \mathbf{M}_e \mathbf{u}_n + \mathbf{K}_e \mathbf{u}_n = \mathbf{F}_{de} + \mathbf{F}_{ie}$$

## I.2.6-Structure élastique de symétrie cylindrique :

Les expressions des matrices élémentaires que nous venons de voir font apparaître des opérateurs différentiels et des intégrales sur le domaine élémentaire. Or, le calcul analytique des dérivations et de l'intégration n'est possible que pour des éléments très simples tels que la barre et la poutre. Dans un code éléments finis, ces calculs utilisent les notions d'intégration numérique sur des éléments de référence et de transformation géométrique entre éléments réels et éléments de référence.

### I.2.6.1-Assemblage et conditions aux limites :

Les règles d'assemblage sont définies par la relation :

$$\mathbf{D} = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{D}_e$$

Attention à ne pas oublier l'erreur de discrétisation géométrique.

### I.2.6.2-Matrices :

L'assemblage des matrices élémentaires masse  $\mathbf{M}_e$  et raideur  $\mathbf{K}_e$  s'effectue selon les mêmes règles. Ces règles sont définies par sommation des termes correspondant au travail virtuel calculé pour chaque élément :

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{M}_e \mathbf{u}_n = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \mathbf{U} \quad \text{et} \quad \sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_n = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}$$

Cette opération traduit simplement que la forme quadratique associée à l'ensemble du domaine est la somme des formes quadratiques des sous-domaines. Elle consiste à « ranger » dans une matrice globale, les termes des matrices élémentaires. La forme de cette matrice dépend bien évidemment de l'ordre dans lequel sont définies les variables globales de  $\mathbf{U}$ .

### I.2.6.3-Efforts imposés :

L'assemblage ne pose pas de problème, il est défini par sommation des termes correspondant au travail virtuel calculé pour chaque élément:

$$\sum_{e=1}^{ne} \delta \mathbf{u}_n^T \mathbf{F}_{de} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_d$$

### I.2.6.4-Efforts inconnus :

L'assemblage peut être mené de façon identique. Cependant, si les liaisons entre les éléments sont parfaites la somme des efforts inconnus aux nœuds internes de la structure est

## CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

nulle. Nous pouvons en tenir compte pour simplifier l'expression du travail virtuel des efforts inconnus, en ne calculant que le travail virtuel des efforts correspondants aux liaisons cinématiques imposées à la structure, et à celui des liaisons non parfaites. Après assemblage, nous obtenons la forme matricielle du principe des travaux virtuels :

$$\mathbf{MU} + \mathbf{KU} = \mathbf{Fd} + \mathbf{Fi}$$

Sous cette forme, nous avons  $N$  équations pour  $N + P$  inconnues. Pour résoudre, il faut tenir compte des  $P$  conditions aux limites cinématiques associées aux  $P$  composantes inconnues du vecteur  $\mathbf{Fi}$ .

### I.2.7-Utilisation d'un logiciel :

Nous citons des quelques noms des logiciels : **ADINA, ABAQUS, CASTEM 2000, NASTRAN, ANSYS, CESAR, SAMCEF,.....etc .**

### I.2.8-Déroulement d'une étude :

Pour réaliser une étude par éléments finis, il faut que les objectifs de l'étude soient bien définis.

Le cadre de l'étude, c'est-à-dire le temps et les moyens disponibles, doit être compatible avec les objectifs et la précision cherchée. Supposons toutes ces conditions remplies, l'étude proprement dite est organisée de façon logique selon les étapes suivantes :

#### I.2.8.1-Analyse du problème :

Cette analyse doit fixer les paramètres du calcul et conduire à la réalisation d'un maillage.

Cette phase basée sur l'expérience personnelle acquise dépend de nombreuses considérations. La difficulté essentielle est de trouver un bon compromis entre les paramètres propres au problème et ceux relatifs à l'environnement de travail. L'analyse du problème nous conduit à préciser un certain nombre d'hypothèses, et à effectuer des choix qui conditionnent les résultats.

#### I.2.8.2-Choix du modèle :

En calcul des structures, les plus classiques sont de type : poutre, élasticité plane, axisymétrique, coques mince ou épaisse, tridimensionnel. . . À ces modèles mathématiques correspondent des familles d'éléments finis.

#### I.2.8.3-Choix du type d'éléments :

Il est fonction de la précision voulue, de la nature du problème, mais aussi du temps disponible.

On choisira les éléments les mieux adaptés dans les familles disponibles.



# CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

## I.2.8.4-Choix du maillage :

Il dépend essentiellement de la géométrie, des sollicitations extérieures, des conditions aux limites à imposer, mais aussi des informations recherchées : locales ou globales. Sans oublier bien entendu le type d'outils dont on dispose pour réaliser ce maillage.

## I.2.8.5-Hypothèses de comportement :

Quel modèle retenir pour représenter le comportement du matériau. Le calcul est-il linéaire ? Doit-on modéliser l'amortissement ? Si le matériau est hétérogène ou composite, peut-on utiliser une méthode d'homogénéisation ? Peut-on traduire l'incompressibilité du milieu ?

Lors d'une étude, on peut être amené à utiliser des éléments finis nouveaux. Il est indispensable de vérifier leur comportement sur des problèmes élémentaires si possible proches de l'étude menée. L'ouvrage « Guide de validation des logiciels de calculs des structures, AFNOR technique 1990 » contient des cas tests pouvant servir pour de nombreux problèmes. Ces cas tests permettent de comparer la solution obtenue avec d'autres solutions numériques ou analytiques.

Ce travail préliminaire est utile pour former sa propre expérience et permet de valider l'utilisation du modèle testé.

## I.2.8.6-Création et vérification des données :

Cette étape dépend du logiciel utilisé. La syntaxe utilisée pour définir le jeu de données est définie dans le mode d'emploi du bloc fonctionnel correspondant. En sortie, un fichier est créé, qui contient toutes les informations nécessaires à l'exécution des calculs. Les vérifications relatives au jeu de données se font généralement graphiquement, grâce à un module informatique appelé préprocesseur.

Différents contrôles peuvent être utilisés pour valider le jeu de données :

- Vérification de la géométrie de la pièce et du maillage.
- Vérification de la prise en compte des sollicitations et des conditions cinématiques (liaisons) imposées à la structure.
- Vérification des propriétés mécaniques utilisées.

Pour des problèmes spécifiques, d'autres contrôles seront envisagés. L'objectif d'éviter de faire tourner un calcul inutilement. Ceci d'autant plus que la recherche d'une solution acceptable pour un problème donné est rarement le résultat d'un seul calcul.

## I.2.8.7-Exécution du calcul :

Ce bloc, le plus coûteux en temps machine est souvent exécuté en tâche de fond. Un fichier de résultats permet de vérifier que les différentes phases de calculs se sont correctement déroulées :

- Interprétation des données, vérification des paramètres manquants.
- Construction des matrices, espace utile pour les gros problèmes.
- Singularité de la matrice raideur, problème de conditions aux limites ou de définition des éléments.

# CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

– Convergence, nombre d'itérations, etc.

Ce fichier peut contenir aussi les résultats du calcul (déplacements, résidus, contraintes. . .) ce qui lui confère dans ce cas un volume généralement très important. Il peut arriver que le calcul échoue. Les principales sources d'erreurs généralement observées à ce niveau sont listées dans le tableau I.1. [ 2 ]

erreurs	causes	remèdes
singularité de <b>K</b>	éléments mal définis, existence de modes rigides, intégration numérique	modifier la topologie du maillage, modifier les liaisons, modifier le nombre de points d'intégration
résolution des équations	arrondi numérique, non convergence	travailler en double précision, changer d'algorithme, augmenter le nombre d'itérations

Tableau I.1 : Principales sources d'erreurs durant le calcul. [ 2 ]

## I.3-L'étude théorique de modèle poutre :

### I.3.1-Modèle poutre en flexion :

Soit un élément rectiligne travaillant en flexion dans le plan  $(O, x_o, y_o)$  supposé principal d'inertie.

Le modèle mathématique est basé sur les hypothèses suivantes\*.

\* Petits déplacements et section droite reste droite. (Hypothèses de Bernoulli)

$$\vec{\mu}(M) = \vec{\mu}(G) + \vec{\theta} \wedge \vec{GM} \text{ et } \vec{\theta} = \text{rot}(\vec{\mu}(G))$$

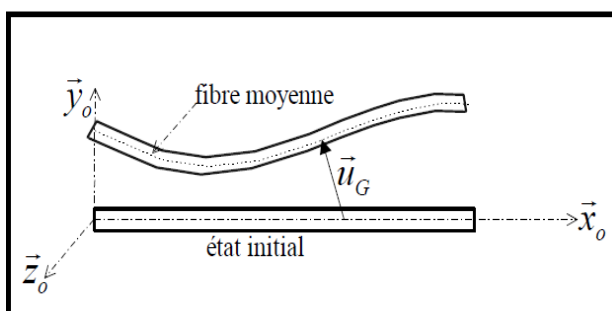


Fig I.11 : la flexion d'une poutre.

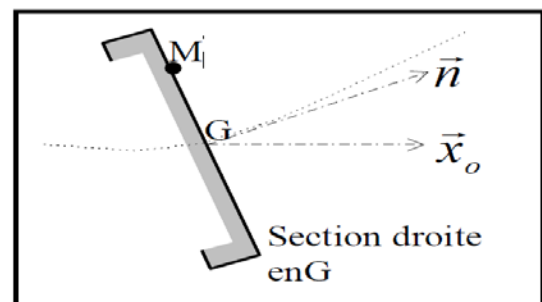


Fig I.12 : section droite en G.

soit dans le plan  $\vec{\theta} = v_{,x} z_o$  et  $\vec{\mu}_{(M,t)} = \text{bo} \{ -y v_{,x} \quad v \quad 0 \}^T$

\* Petites déformations.

$$\epsilon = \text{grad } u \text{ avec } \text{grad } u = \begin{bmatrix} -y v_{,xx} & -v_{,x} & 0 \\ v_{,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \epsilon_{xx} = -y v_{,x}$$

\* Milieu isotrope homogène élastique

État de contrainte uni axial.  $\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx}$

# CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

En intégrant les contraintes sur la section en tenant compte de :  $\int_S y dS = 0$  et  $I = \int_S y^2 dS = 0$ .

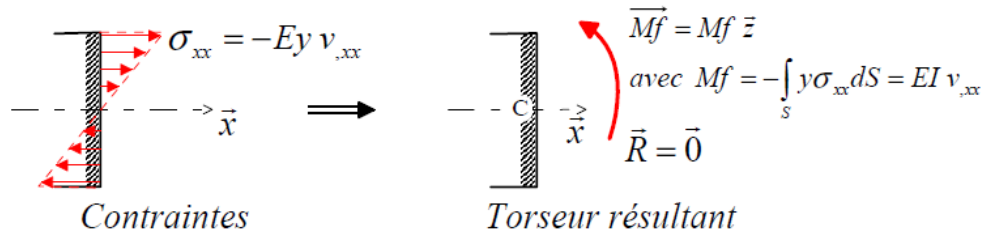


Fig I.13 : les contraintes sur la section

Nous obtenons la **loi de comportement intégrée** des poutres.

$$M_f = EI v_{,x^2}$$

## I.3.2 Approximation nodale :

L'élément fini « poutre » utilise comme variables nodales la flèche et sa dérivée première (Rotation de la section droite), il fait partie de la famille des éléments de type l'Hermite. Le repère local orthonormé lié à l'élément, a pour direction  $x$  l'axe de la poutre orienté de  $i$  vers  $j$ , et pour direction  $y$  un **vecteur du plan principal d'inertie** de la section droite. Les variables nodales sont :

$$\langle v_i(t) \theta_i(t) v_j(t) \theta_j(t) \rangle$$

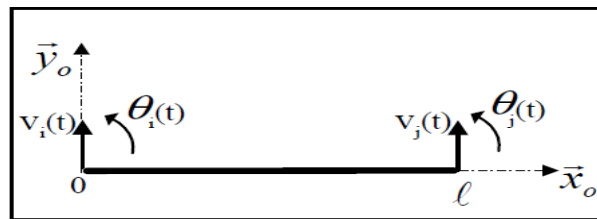


Fig 1.14 : Les efforts extérieurs

Pour identifier nos quatre variables nodales nous utilisons une approximation polynomiale cubique (degré 3) de la forme :  $v^*(x,t) = \langle 1 \ x \ x^2 \ x^3 \rangle$

$$\begin{Bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \end{Bmatrix}$$

Par identification des variables nodales avec l'approximation de la flèche et de la rotation aux nœuds, nous obtenons la relation matricielle suivante :

$$\begin{Bmatrix} v_i(t) \\ \theta_i(t) \\ v_j(t) \\ \theta_j(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v^*(0,t) \\ \theta^*(0,t) \\ v^*(\ell,t) \\ \theta_j^*(\ell,t) \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \ell & \ell^2 & \ell^3 \\ 0 & 1 & 2\ell & 3\ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \end{Bmatrix}$$

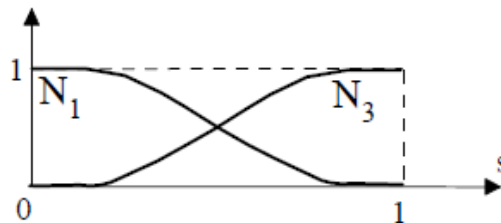
# CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

Inversons cette relation et reportons le résultat dans l'expression de l'approximation, nous obtenons :

$$v^*(x,t) = \langle N \rangle_e \{ U_e \} = \langle N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \rangle \begin{Bmatrix} v_i(t) \\ \theta_i(t) \\ v_j(t) \\ \theta_j(t) \end{Bmatrix}$$

Avec les fonctions d'interpolation suivante :

$$\begin{cases} N_1(s) = 1 - 3s^2 + 2s^3 \\ N_3(s) = 3s^2 - 2s^3 \end{cases} \quad \text{Ou } s = \frac{x}{\ell}$$

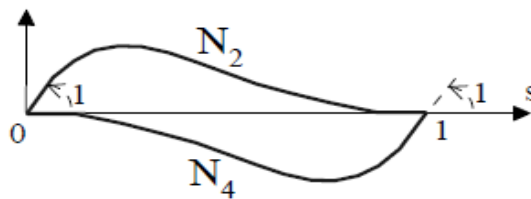


FigI.15: la déformation d'une poutre bi encastree.

$N_1$  et  $N_3$  représentent la déformée d'une poutre bi – encastree pour laquelle on impose un déplacement unité à une des deux extrémités.

$$\begin{cases} N_2(s) = \ell (s - 2s^2 + s^3) \\ N_4(s) = \ell (-s^2 + s^3) \end{cases}$$

$N_2$  et  $N_4$  représentent la déformée d'une poutre encastree à une extrémité. Pour laquelle on impose une rotation unité à l'autre extrémité.



FigI.16: la déformation d'une poutre encastree à l'extrémité.

## I.3.3-Matrice raideur et masse :

L'énergie de déformation associée à notre élément est  $2E_d = \int_0^\ell EI (v, xx)^2 dx$   
Utilisons l'approximation nodale du champ des déplacements

$$v_{,xx} = \langle N_{,xx} \rangle \{ U_e \}$$

## CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

Avec:  $\langle N_{,xx} \rangle = [B] = \left\langle \frac{6}{\ell^2} (-1+2s), \frac{2}{\ell} (-2+3s), \frac{6}{\ell^2} (1-2s), \frac{2}{\ell} (1+3s) \right\rangle \{ U_e \}$

D'où :  $[K_e] = \int_0^\ell [B]^T EI [B] dx$  soit  $[K_e] = \frac{EI}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12 & 6\ell & -12 & 6\ell \\ 6\ell & 4\ell^2 & -6\ell & 2\ell^2 \\ -12 & -6\ell & 12 & 6\ell \\ 6\ell & 2\ell^2 & -6\ell & 4\ell^2 \end{bmatrix}$

Sur  $\langle v_i(t) \ell \theta_i(t) v_j(t) \ell \theta_j(t) \rangle$

$$[M_e] = \rho S \ell \begin{bmatrix} \frac{13}{35} & \frac{11\ell}{210} & \frac{9}{70} & -\frac{13\ell}{420} \\ \frac{11\ell}{210} & \frac{\ell^2}{105} & \frac{13\ell}{420} & -\frac{\ell^2}{140} \\ \frac{9}{70} & \frac{13\ell}{420} & \frac{13}{35} & -\frac{11\ell}{210} \\ -\frac{13\ell}{420} & -\frac{\ell^2}{140} & -\frac{11\ell}{210} & \frac{\ell^2}{105} \end{bmatrix}$$

Sur  $\langle v_i(t) \ell \theta_i(t) v_j(t) \ell \theta_j(t) \rangle$

- La matrice raideur d'un élément est singulière de rang 2. Ces singularités correspondent aux deux déplacements de solide rigide, une translation et une rotation ;
- Les matrices sont définies sur les variables locales élémentaires définies par rapport au repère local de l'élément ;
- Pour la flexion dans le plan ( $xoz$ ), il suffit de changer  $EI_z$  en  $EI_y$  et de modifier les signes des termes en  $v$ .

### I.3.4-Vecteur force généralisé :

Soit un élément poutre sur lequel est appliquée une densité linéique d'efforts transversaux  $f$ . Le travail virtuel de ces efforts est

$$\delta W_f = \int_0^\ell \vec{f} \cdot \delta \vec{v} dx = \{ \delta U_e \}^T \int_0^\ell [N]^T f dx$$

Pour une densité de charge uniforme nous obtenons :

$$\{ F_d \}_e = \int_0^\ell f \langle N_{(x)} \rangle^T dx = f \begin{bmatrix} \frac{\ell}{2} \\ \frac{\ell^2}{12} \\ \frac{\ell}{2} \\ -\frac{\ell^2}{12} \end{bmatrix} \quad [3]$$

# CHAPITRE I : GÉNÉRALITÉ SUR MEF

## I.4-Conclusion :

Les logiciels modernes utilisant la méthode des éléments finis bénéficient d'une interface graphique rendant leur utilisation relativement simple. Par ailleurs, un certain nombre de tâches sont automatisables. On peut donc quasiment lancer un calcul sur ordinateur sans connaître la méthode.

Cependant, le modèle utilisé risque d'être inadapté au problème, on aura donc un résultat très éloigné de la réalité.

L'utilisateur doit avoir des connaissances suffisantes pour être en mesure de :

- \_ maîtriser le modèle, c'est-à-dire utiliser les options permettant de représenter le plus fidèlement possible la réalité.
- \_ contrôler la qualité du résultat, détecter les résultats manifestement erronés.
- \_ interpréter les résultats, et éventuellement les posttraiter, c'est-à-dire utiliser les résultats pour faire d'autres calculs.

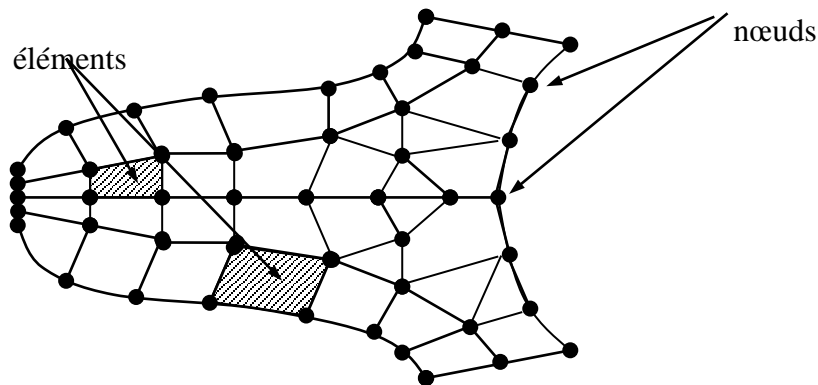
# CHAPITRE II : LA DISCRÉTISATION ET LA MODÉLISATION

## CHAPITRE II : LA DISCRÉTISATION LA MODÉLISATION.

### II.1-LA DISCRETISATION :

#### II.1.1- INTRODUCTION :

Une description non-sophistiquée de la MEF pourrait être définie sous la forme suivante : la structure à analyser est divisée en plusieurs éléments (petites pièces comme celles qui forment un puzzle). Ces éléments sont ensuite reconnectés par l'intermédiaire des nœuds (fig.II.1). Ces nœuds sont « des punaises » ou « des points de colle » qui maintiennent les éléments dans un ensemble unitaire.



**Fig.II.1: Discrétisation d'une structure en nœuds et éléments (dent d'une roue dentée).**

La Méthode des Eléments Finis a développé une série de types d'éléments finis qui, pour le début, peuvent être classifiés en :

- éléments finis unidimensionnels (généralement des barres).
- éléments finis bidimensionnels (plaques et mêmes volumes).
- éléments finis tridimensionnels (blocs massifs).

Eléments	linéaires	paraboliques (quadratiques)	cubiques
unidimensionnels			
bidimensionnels			
tridimensionnels			
autres types	Masse	Ressort	Contact

**Le tableau II.1: une série des types d'éléments finis.**

## CHAPITRE II : LA DISCRÉTISATION ET LA MODÉLISATION

Les éléments finis sont générés par des points qui ne sont que des nœuds de la structure. Il existe des éléments ayant un degré supérieur à ceux cubiques (qui sont les plus performants) mais le plus couramment sont utilisés les éléments linéaires et paraboliques.

Certains éléments finis ont des nœuds intérieurs pour améliorer la précision, mais l'utilisateur ne travaille pas avec ces nœuds. Ils sont générés et ensuite condensés dans la phase de calcul des matrices de rigidité des éléments. [ 4 ]

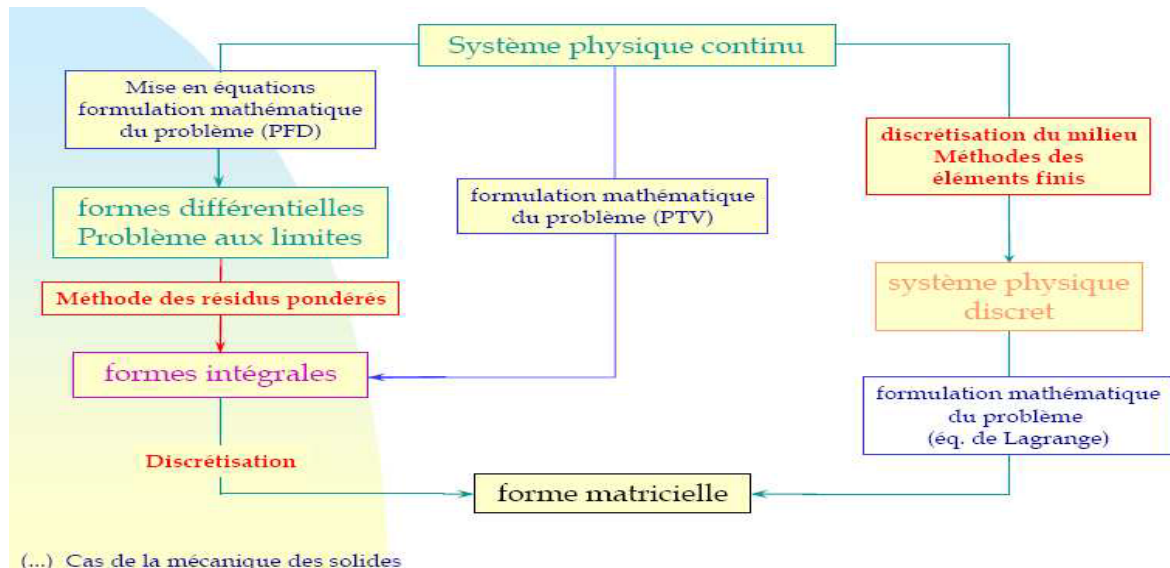


Figure II.2 : Vue synthétique des méthodes d'approximation. [ 5 ]

### II.1.2-Approximation nodale par sous-domaines :

La construction d'une fonction approchée  $u(x)$  est difficile lorsque le nombre de nœuds et donc de paramètres inconnus  $u_i$  devient important. Le problème se complique encore si le domaine  $V$  a une forme complexe et si la fonction  $u(x)$  doit satisfaire des conditions aux limites sur la frontière de  $V$ .

La méthode d'approximation nodale par sous-domaines simplifie la construction de  $u(x)$ . Elle consiste à :

Identifier un ensemble de sous-domaines  $V_e$  du domaine  $V$ .

Définir une fonction approchée  $u_e(x)$  différente sur chaque sous-domaine par la méthode d'approximation nodale. Chaque fonction  $u_e(x)$  peut dépendre des variables nodales d'autres sous-domaines comme c'est le cas dans l'approximation de type "Spline".

### II.1.3-Approximation nodale par éléments finis :

La méthode d'approximation nodale par éléments finis est une méthode particulière d'approximation nodale par sous-domaines qui présente les particularités suivantes :

L'approximation nodale sur chaque sous-domaine  $V_e$  ne fait intervenir que les variables nodales attachées à des nœuds situés sur  $V_e$  et sur sa frontière.



## CHAPITRE II : LA DISCRÉTISATION ET LA MODÉLISATION

Les fonctions approchées  $u_e(x)$  sur chaque sous-domaine  $V_e$  sont construites de manière à être continues sur  $V_e$  et elles satisfont des conditions de continuité entre les différents sous-domaines. Les sous-domaines  $V_e$  sont appelés des ELEMENTS connectés par des NŒUDS.

### II.1.4-Règles de partition du domaine en éléments :

Deux éléments distincts ne peuvent avoir en commun que des nœuds situés sur leurs frontières, si elle existe.

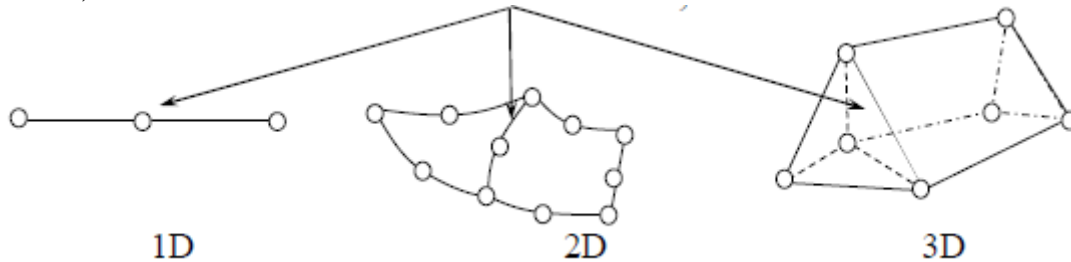


Fig II.3 : les types de discrétisation.

L'ensemble de tous les éléments doit constituer un domaine aussi proche que possible du domaine donné.

Le recouvrement de deux éléments et les trous entre éléments sont inadmissibles.



Fig II.4 : les trous entre deux éléments.

### II.1.5-Erreur de discrétisation géométrique :

Lorsque la frontière du domaine est constituée par des courbes ou des surfaces plus complexes que celles qui définissent les frontières des éléments, une erreur est inévitable. Cette erreur est appelée "erreur de discrétisation géométrique". Elle peut être réduite

- en diminuant la taille des éléments.
- en utilisant des éléments à frontières plus complexes. [6]



Fig II.5: les erreurs de discrétisation. [6]

# CHAPITRE II : LA DISCRÉTISATION ET LA MODÉLISATION

## II.2-LA MODELISATION :

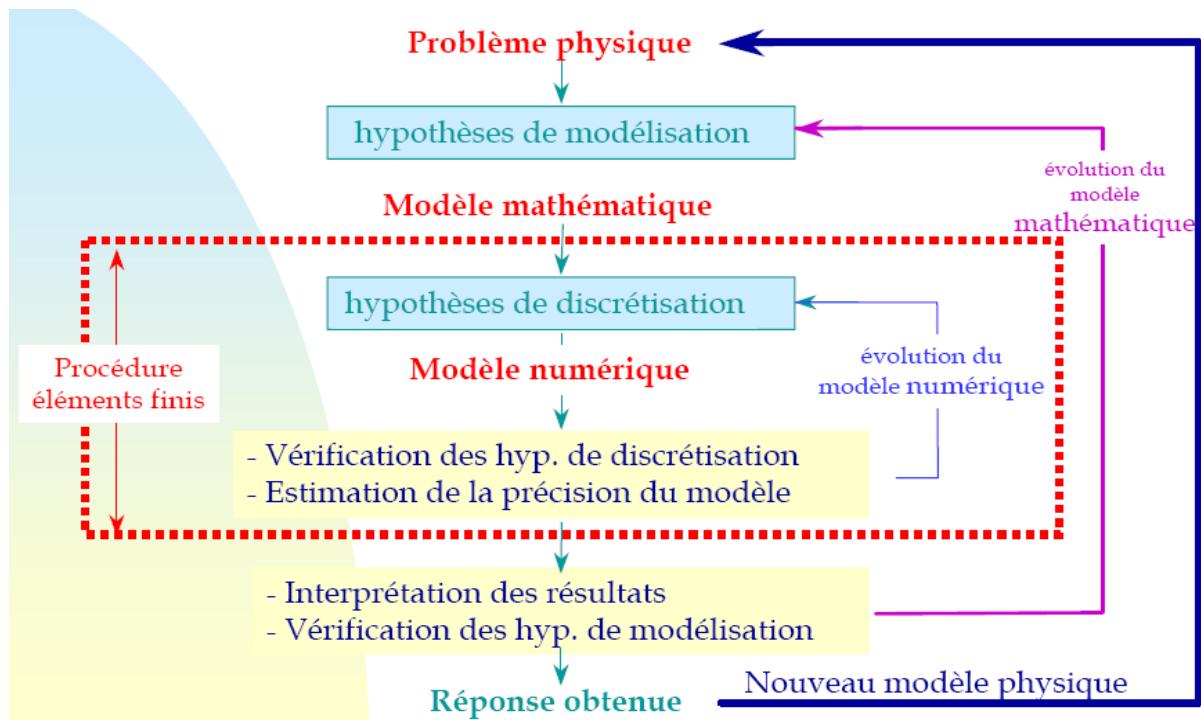


Figure II.6 : Processus d'analyse utilisant un modèle numérique. [5]

Dans ce chapitre sera présenté et expliqué le sens physique des matrices de rigidité pour les éléments de poutre.

L'analyse statique néglige le temps comme variable indépendante et reste valable autant que les déflexions sont constantes ou varient peu. L'analyse linéaire statique sera exclue au-delà de la limite d'écoulement (domaine plastique), où les déformations sont suffisamment grandes conduisant à une défaillance de la structure.

Après avoir fait une analyse préliminaire approximative, les principales étapes qu'il faut prendre en compte au cours d'une analyse par MEF sont les suivantes :

1. Préparation du modèle. En ce sens si l'analyse doit contenir :
  - a) la discrétisation de la structure ou du milieu continu divisé en éléments finis ;
  - b) l'application du chargement ;
  - c) la prescription des supports.
2. Accomplissement des calculs. Le logiciel doit :
  - a) générer la matrice de rigidité  $[k_i]$  de chaque élément « i » ;
  - b) relier les éléments ensemble, ce qui veut dire rassembler les matrices  $[k_i]$  de chaque élément « i » pour obtenir la matrice globale  $[K]$  ;
  - c) rassembler les chargements dans un vecteur global de chargements  $\{F\}$  ;
  - d) imposer les conditions dans les supports ;
  - e) résoudre les équations  $\{F\} = [K] \cdot \{\delta\}$  pour le vecteur des inconnues  $\{\delta\}$  (déplacements nodaux).

## CHAPITRE II : LA DISCRÉTISATION ET LA MODÉLISATION

3. Post procession de l'information contenue dans le vecteur  $\{\delta\}$ . Dans l'analyse des contraintes, cela est équivalent au calcul des contraintes et des déformations.

4. à première étape est la plus importante du fait que cela nécessite un bon jugement de l'analyste sur les types d'éléments finis qui doivent être utilisés dans l'analyse et combien de grossière ou raffinée doit être la discrétisation dans différentes régions du modèle. La deuxième étape est automatiquement réalisée par l'ordinateur. De façon similaire, le troisième pas est réalisé par l'ordinateur, où la carte en couleur des contraintes et des déformations résultantes sera fournie automatiquement.

### II.2.1- Déduction de la matrice de rigidité pour l'élément de poutre :

#### a) Méthode directe :

La figure II.7 montre un élément de poutre dans le plan. L'élément est prismatique, ayant un module d'élasticité longitudinal  $E$ , de moment d'inertie  $I$  pour la section axiale. L'axe qui passe par les centres de chaque section a un déplacement latéral  $v = v(x)$ . Conformément à la théorie des poutres la fonction  $v = v(x)$  est un polynôme cubique en  $x$  pour une poutre uniforme prismatique chargée à ses extrémités.

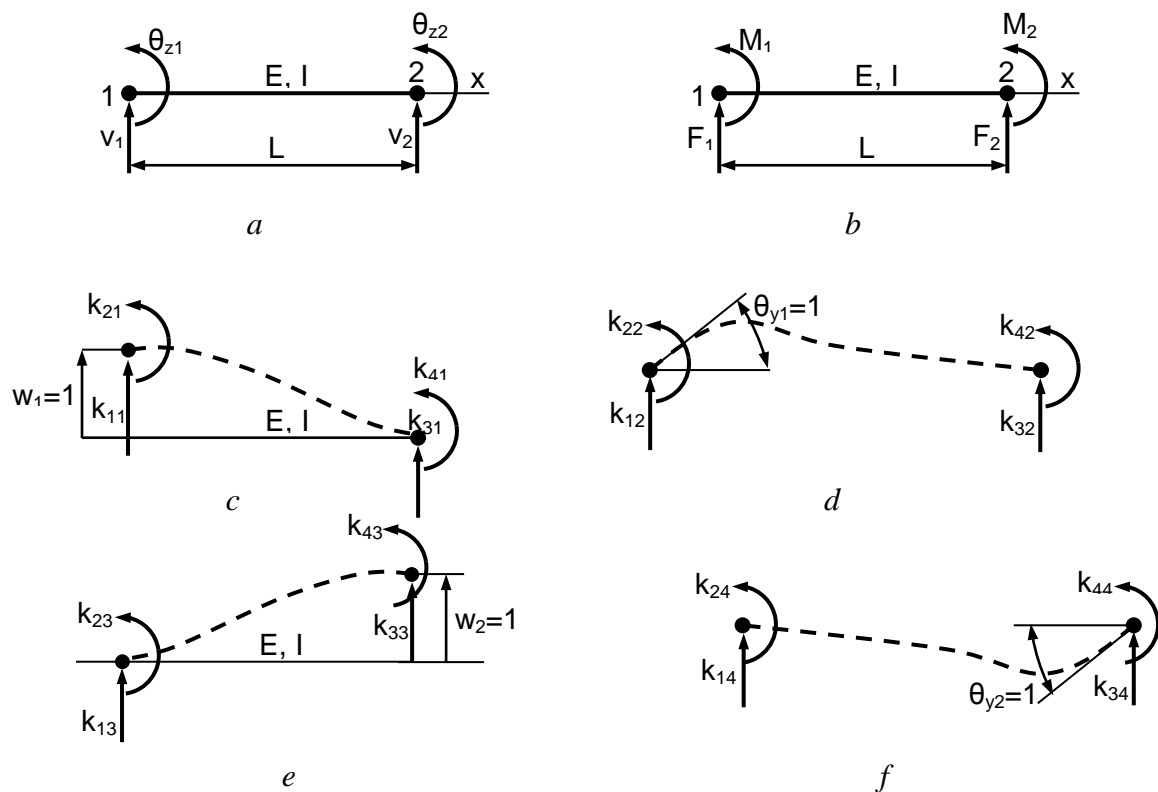


Figure II.7:

- a) *Elément de poutre et ses degrés de liberté*
- b) *Chargements nodaux associés aux degrés de liberté*
- c) *Formes déviées associées par l'activation de chaque degré de liberté*

## CHAPITRE II : LA DISCRÉTISATION ET LA MODÉLISATION

Les fonctions de forme associées par l'activation de l'un des quatre degrés de liberté sont présentées dans le Tableau II.2.

Activation du degré de liberté	Fonction de forme correspondante
Déplacement du nœud 1	$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$
Rotation du nœud 1	$N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$
Déplacement du nœud 2	$N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$
Rotation du nœud 2	$N_4 = -\frac{x^2}{L^2} + \frac{x^3}{L^2}$

**Tableau II.2 : les fonctions de forme par l'activation du degré de liberté.**

Les sens des déplacements sont considérés positifs de bas vers le haut tandis que les sens positifs des rotations correspondent au sens antihoraire.

Pour trouver les composantes de la première colonne de la matrice de rigidité  $[K]$  correspondant à l'élément de poutre, respectivement  $[k_{11} \ k_{21} \ k_{31} \ k_{41}]^T$  on a utilisé les conditions suivantes :

- $w_1 = 1$  dans le nœud 1, ce qui conduit à :  $\frac{k_{11}L^3}{3EI} - \frac{k_{21}L^2}{2EI} = 1$
- $\theta_{z1} = 0$  dans le nœud 1, ce qui conduit à :  $-\frac{k_{11}L^2}{2EI} + \frac{k_{21}L}{EI} = 0$

A part ces deux équations, les équations d'équilibre de la statique seront ajoutées pour déterminer les deux autres composantes, respectivement  $k_{31}$  et  $k_{41}$  :

$$\sum F = 0 \Rightarrow k_{11} + k_{31} = 0$$

$$\sum M_{(2)} = 0 \Rightarrow k_{21} + k_{41} - k_{11} \cdot L = 0$$

De façon similaire, on aura pour chacun des trois états de déformation restés un set de quatre équations. En ce cas, chacun de ces trois états complètera les trois colonnes restées inachevées de la matrice de rigidité.

La matrice de rigidité  $[K]$  opère sur le vecteur des degrés de liberté associés à chaque nœud,  $[\delta] = [w_1 \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{y2}]^T$ .

Le résultat de ce processus sera donc :

## CHAPITRE II : LA DISCRÉTISATION ET LA MODÉLISATION

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{L^2}{6EI} & \frac{L}{4EI} & -\frac{L^2}{6EI} & \frac{L}{2EI} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{L^2}{6EI} & \frac{L}{2EI} & -\frac{L^2}{6EI} & \frac{L}{4EI} \end{bmatrix}$$

### b) Procédure formelle

La forme spéciale de l'équation (II.4) sera dans ce cas :

$$[K] = \int_0^L [B]^T \cdot EI \cdot [B] dx$$

où  $[B]$  est maintenant la matrice qui donne l'expression de la courbure de l'élément de poutre à partir du produit  $[B] \cdot \{\delta\}$  :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \left[ \frac{d^2}{dx^2} N \right] \cdot \{\delta\} = [B] \cdot \{\delta\}$$

En terme de coordonnées généralisées  $\beta_i$  le déplacement latéral  $w = w(x)$  pour un élément de poutre sera sous la forme d'un polynôme cubique :

$$w = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3$$

Les termes  $\beta_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) peuvent être déterminés en fonction des degrés de liberté associés à chaque nœud. Par exemple :

- à  $x = 0$ ,  $w = w_1$  et  $\theta_y = \theta_{y1}$ , où  $\theta = \frac{dw}{dx}$
- à  $x = L$ ,  $w = w_2$  et  $\theta_y = \theta_{y2}$

Dans ces conditions,  $\{w\} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \cdot \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = [N] \cdot \{\delta\}$

Après avoir résolu le système, on obtient pour la matrice  $[B]$  la forme suivante :

$$[B] = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \end{bmatrix}$$

En ce qui concerne le calcul des contraintes, on sait du cours de Résistance des matériaux que dans le cas d'une poutre soumise à la flexion,

$$\sigma_x = \frac{M}{I} \cdot z \quad \text{où} \quad M = EI \frac{d^2 w}{dx^2} = EI \cdot [B] \cdot \{\delta\}$$

## CHAPITRE II : LA DISCRÉTISATION ET LA MODÉLISATION

Pour l'élément de poutre 2D (bidimensionnel), celui-ci est la combinaison entre un élément de barre et un élément de poutre. Dans ce cas, la matrice de rigidité [K] sera :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

### II.2.2-Systèmes de coordonnées globales et locales :

L'utilisateur définit la géométrie d'un modèle avec éléments finis dans un système de coordonnées global XYZ. Le logiciel génère typiquement une matrice de rigidité pour un élément quelconque dans un système local de coordonnées xyz et le convertit dans le système global pour réaliser l'assemblage des éléments. Le système global et local peut être parallèle ou coïncidents, cas dans lesquels les composantes des déplacements nodaux sont identiques dans les deux systèmes.

### II.2.3-Propriétés de la matrice de rigidité :

Les matrices de rigidité [k] (dans le système local) et [K] (dans le système global) sont symétriques. Cela reste toujours vrai pour tout élément de structure où il existe une relation linéaire entre les charges appliquées et les déformations résultantes.

Chaque coefficient de la diagonale des matrices [k], respectivement [K] sont positifs. Imaginons qu'un certain degré de liberté  $\delta_i$  serait le seul degré de liberté non nul ; le chargement associé à ce degré est  $f_i = k_{ii}\delta_i$ . Du fait que  $d_i$  et  $r_i$  sont positifs dans la même direction, une diagonale négative des coefficients  $k_{ii}$  voudrait dire qu'un chargement et son déplacement correspondant seraient orientés de façon opposée, fait qui en réalité est déraisonnable.

Une structure qui est soit sans supports soit avec des supports inadéquats a une matrice de rigidité [K] singulière et dans ce cas le logiciel d'éléments finis ne peut pas être capable de résoudre l'équation  $\{F\} = [K] \cdot \{\delta\}$ . Pour prévenir la singularité, les supports doivent être suffisamment nombreux pour prévenir tous les mouvements de corps rigide possibles. [4]

## CHAPITRE III : GÉNÉRALITÉ SUR LA FONCTION D'AIRY

## CHAPITRE III : GÉNÉRALITÉ SUR LA FONCTION D'AIRY.

### III.1-Introduction sur Fonction d'Airy :

#### III.1.1-Equation de compatible:

Si l'on pose  $\gamma_{xy} = \gamma_{yz}=0$  et on supprime toutes les dérivées partielles où elle intervient la coordonnée Z.

##### a) Etat plan déformation :

$$\epsilon_{zz} = \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = 0 \quad \frac{\partial}{\partial Z} = 0$$

Il ne reste que :  $((\partial^2 \epsilon_{xx} / \partial y^2) + (\partial^2 \epsilon_{yy} / \partial x^2)) = (\partial^2 \gamma_{xy} / \partial xy)$

##### b) Etat plan contrainte :

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz}=0 \quad \frac{\partial}{\partial Z} = 0 \quad \epsilon_{zz} \neq 0 \quad (\epsilon_{zz} = \frac{-\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{-\nu}{1-\nu} (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}))$$

Il ne reste que :

$$(\partial^2 \epsilon_{xx} / \partial y^2) + (\partial^2 \epsilon_{yy} / \partial x^2) = (\partial^2 \gamma_{xy} / \partial xy)$$

$$(\partial^2 \epsilon_{zz} / \partial y^2) = 0 \quad ; \quad (\partial^2 \epsilon_{zz} / \partial x^2) = 0 \quad ; \quad 2(\partial^2 \epsilon_{zz} / \partial x \partial y) = 0$$

Les trois dernières équations montrent que  $\epsilon_{zz}$  est une fonction linéaire homogène en les coordonnées X, Y.

$$\epsilon_{zz} = -\nu (\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) = a x + b y + c$$

Ce qui prouve que l'état plan contrainte n'est qu'une approximation à l'égard de l'état plan déformation qui est à la contrainte exacte.

#### III.1.2-Equation de compatibilité en termes de contraintes ou équation de BELTRAN-MICHEL :

En état plan nous rappelons que  $\frac{\partial}{\partial Z} = 0$  donc  $(\partial^2 / \partial Z^2)$  automatique nulle.

$$\text{Donc : } (\partial^2 \sigma_{xx} / \partial Z^2) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial F_z}{\partial Z} = \frac{\partial F_x}{\partial Z} = \frac{\partial F_y}{\partial Z} = 0.$$

$$(1+\nu) \partial_{kk} \sigma_{ij} + \partial_{ij} \sigma_{kk} + (1+\nu) (\partial_i F_j + \partial_j F_i) + \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} \partial_k F_k \delta_{ij}$$

Si :  $i=j=3$ .

## CHAPITRE III : GÉNÉRALITÉ SUR LA FONCTION D'AIRY

$$(1+\nu) \nabla^2 \sigma_{zz} + (\partial^2 \sigma / \partial Z^2) + 2(1+\nu) \frac{\partial F_z}{\partial Z} + \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial Z} \right)$$

$$(\partial^2 \sigma / \partial Z^2) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial F_z}{\partial Z} = 0$$

$$(1+\nu) \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{\nu(1+\nu)}{1-\nu} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) = 0$$

a) Etat plan déformation :  $\sigma_{zz} = \nu (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$

$$\nu \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) + \frac{\nu}{1-\nu} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) = 0$$

Où :  $\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = - \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \dots\dots\dots(a)$

b) Etat plan contrainte :

En faisant la remarque concernant la substitution pour passer de l'état plan déformation à l'état plan contrainte :

$$E = \frac{E'(1+2\nu')}{(1+\nu)2} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\nu'}{1+\nu'}$$

Donc  $-\frac{1}{1-\nu} = \frac{1}{1-\frac{\nu'}{1+\nu'}} = -\frac{1+\nu'}{1+\nu'-\nu'} = -(1+\nu')$

D'où  $\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1+\nu') \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right) \dots\dots\dots(b)$

Si les forces de volume sont nulles ou constantes les deux états coïncident

$\nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \dots\dots\dots(c)$

Les équations d'équilibre en cas des forces de volume sont non nulles :

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + F_y = 0$$

Les équations d'équilibre en cas des forces de surface sont non nulles :

$$\sigma_{xx} l + \tau_{xy} m = T_x$$

$$\tau_{xy} l + \sigma_{yy} m = T_y$$



## CHAPITRE III : GÉNÉRALITÉ SUR LA FONCTION D'AIRY

Et donne des équations (a), (b) ou (c) selon le cas constituent un système d'équation qui sont généralement suffisantes pour déterminer complètement l'état de contrainte dans les problèmes d'élasticité planes.

a) Cas où les forces de volume sont nulles les équations à satisfaire s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(a)$$

$$((\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2))(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0 \dots\dots\dots(b)$$

Plus les équations d'équilibre à la surface (c).

La méthode la plus commode pour résoudre ce système d'équation est introduire une fonction de contrainte  $\phi$  si on adopte pour les composantes du tenseur contrainte les expressions suivantes :

$$\sigma_{xx} = (\partial^2 \phi / \partial y^2) ; \sigma_{yy} = (\partial^2 \phi / \partial x^2) ; \tau_{xy} = -(\partial^2 \phi / \partial x \partial y).$$

Il est facile de constater que les deux équations d'équilibre (a) sont satisfaites.

En introduisant ces expressions dans l'équation compatible (b), on trouve que la fonction de contrainte  $\phi$  doit satisfaire à l'équation :

$$((\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2))((\partial^2 \phi / \partial x^2) + (\partial^2 \phi / \partial y^2)) = \nabla^2 \nabla^2 \phi = 0.$$

$$\text{Donc } ((\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2))((\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2)) \phi = 0$$

$$\text{Soit } [(\partial^4 / \partial x^4) + (2(\partial^4 / \partial x^2 \partial y^2)) + (\partial^4 / \partial y^4)] \phi = \nabla^2 \nabla^2 \phi = 0 \dots\dots\dots(1)$$

Ainsi donc la solution d'un problème d'élasticité plane qui ne comporte pas des forces de volume (1) qui satisfait aux conditions au contour du problème.

$\phi$  est appelée la fonction de contrainte d'AIRY, elle doit être biharmonique.

b) Cas où il existe des forces de volume dérivant potentiel :

On dit que les forces de volume  $F = (F_x, F_y)$  dérivant potentiel  $V$  si :

$$F = \text{grad } V = \nabla V$$

$$\text{C'est-à-dire } \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Dans ce cas les équations d'équilibre intérieur s'écrivent :

## CHAPITRE III : GÉNÉRALITÉ SUR LA FONCTION D'AIRY

$$\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_{xx} + v) + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_{yy} + v) = 0$$

Ces équations sont de la même forme que les équations (a) et sont donc satisfaites si l'un pose à nouveau :

$$\sigma_{xx} + v = (\partial^2 \phi / \partial y^2) ; \sigma_{yy} + v = (\partial^2 \phi / \partial x^2) ; \tau_{xy} = -(\partial^2 \phi / \partial x \partial y)$$

Si on introduit ces expressions dans l'équation de compatibilité (a) valable pour l'état

$$\text{plan déformation :} \quad \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} \right)$$

$$\nabla^2 ((\partial^2 \phi / \partial y^2) + (\partial^2 \phi / \partial x^2) - 2v) = \frac{1}{1-\nu} ((\partial^2 v / \partial x^2) + (\partial^2 v / \partial y^2))$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \phi = 2 \nabla^2 v - \frac{1}{1-\nu} \nabla^2 v = \frac{1-2\nu}{1-\nu} \nabla^2 v$$

$$\text{soit } [(\partial^4 / \partial x^4) + (2(\partial^4 / \partial x^2 \partial y^2)) + (\partial^4 / \partial y^4)] \phi = \frac{1-2\nu}{1-\nu} ((\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2)) v \dots (2)$$

$$\text{Alors l'état plan contrainte : } \nu = \frac{\nu'}{1+\nu'} \longrightarrow \frac{1-2\nu}{1-\nu} = 1-\nu'$$

$$\text{Donc } [(\partial^4 / \partial x^4) + (2(\partial^4 / \partial x^2 \partial y^2)) + (\partial^4 / \partial y^4)] \phi = 1-\nu' ((\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2)) v$$

En particulier si le potentiel  $V$  est une fonction harmonique c'est-à-dire :

$$((\partial^2 v / \partial x^2) + (\partial^2 v / \partial y^2)) = ((\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2)) v = \nabla^2 v = 0 \dots (3)$$

Les équations (2) et (3) se réduisent à l'équation (1) dans le cas où les forces de volume sont nulles ou constantes connaissant les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\tau_{xy}$ , on peut déduire les déformations  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\gamma_{xy}$  par les formules pour l'état plan de contrainte et pour l'état plan de déformation, une fois les déformations calculées il peut en déduire les déplacements  $u$  et  $v$  par les formules liant le tenseur déformation ou vecteur déplacement.

Grande difficulté réside dans la détermination de la fonction d'AIRY. [7]

### III.2-Flexion simple d'une poutre rectangulaire :

On considère une poutre droite d'axe  $(O ; E_1)$ , de section rectangulaire (hauteur  $2h$ , épaisseur  $2b$ ). Cette poutre est encastree dans un massif à l'abscisse  $x_1=0$ . L'extrémité libre est la seule supportant un chargement. D'autre part on suppose que les forces de volume sont nulles. On suppose que l'épaisseur est très faible devant les autres dimensions de la poutre et qu'en conséquence, on peut faire l'hypothèse d'un état plan de contrainte.

## CHAPITRE III : GÉNÉRALITÉ SUR LA FONCTION D'AIRY

Nous adoptons la fonction d'Airy suivante :

$$\varphi = \frac{P}{I} \left[ \frac{h^2}{2} x_1 x_2 + \frac{l}{6} x_2^3 - \left( \frac{x_1 x_2^3}{6} \right) \right] \quad \text{avec } I = [(2b)(2h)^3/12]$$

On constate aisément que la fonction ainsi définie est bi harmonique. On peut alors déterminer l'état de contrainte obtenu :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \frac{P}{I} (l - x_1) x_2 \\ \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0 \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{P}{2I} (h^2 - x_2^2) \end{cases}$$

Cet état de contrainte est parfaitement compatible avec la condition de non chargement des faces supérieure  $x_2=h$  et inférieure  $x_2=-h$  de la poutre. Pour la section extrémité  $x_1=l$ , on obtient un torseur équivalent avec un moment nul au centre de surface et une résultante n'ayant qu'une composante :

$$\int_S \overline{T(M; E_1)} ds = -PE_2$$

On peut donc considérer que la poutre est sollicitée en flexion simple. Il est à noter que l'état de contrainte ainsi obtenu est parfaitement en accord avec la théorie élémentaire des poutres.

Il reste à vérifier les conditions aux limites sur les déplacements et en particulier la condition d'encastrement de la section  $x_1=0$ .

Il convient donc de calculer la forme générale du champ de déplacement. Toutefois, dans le cas d'élasticité plane, il n'est pas nécessaire d'utiliser la méthode générale avec la détermination du tenseur antisymétrique. L'intégration peut se faire directement à partir des relations déplacements-déformations.

Dans notre exemple nous avons le tenseur déformation suivant :

$$\begin{cases} \epsilon_{11} = \frac{P}{EI} (l - x_1) x_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \epsilon_{22} = -\frac{\nu P}{EI} (l - x_1) x_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \epsilon_{12} = -\frac{(1+\nu)P}{2EI} (h^2 - x_2^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \end{cases}$$

Les deux premières équations nous permettent d'écrire :

## CHAPITRE III : GÉNÉRALITÉ SUR LA FONCTION D'AIRY

$$\begin{cases} u_1 = \frac{P x_2}{E I} \left( l x_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) + f(x_2) \\ u_2 = -\frac{\nu P}{E I} (l - x_1) \frac{x_2^2}{2} + g(x_1) \end{cases}$$

A partir de la troisième équation, on obtient :

$$\begin{cases} f(x_2) = -K x_2 + \frac{P}{2 E I} \left[ (2 + \nu) \frac{x_2^3}{3} - 2(1 + \nu) h^2 x_2 \right] + K_2 \\ g(x_1) = K x_1 - \frac{P}{2 E I} \left( l x_1^2 - \frac{x_1^3}{3} \right) + K_1 \end{cases}$$

Le champ de déplacement n'étant déterminé que par trois constantes, il est pratiquement impossible de respecter la condition d'encastrement pour tous les points de la section droite définie par  $x_1=0$ . Pour définir les constantes, on se contentera de donner leur valeur afin de respecter le non déplacement de certains points de la section origine. On peut écrire par exemple :

$$\begin{cases} u_1(0,0)=0 \\ u_2(0,0)=0 \\ u\left(0, \pm \frac{h}{2}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2=0 \\ K_1=0 \\ K=-\frac{P h^2 (4+5 \nu)}{6 E I} \end{cases}$$

On peut alors en déduire la déformée de la ligne moyenne ( $x_2=x_3=0$ ) :

$$u_2(x_1, 0) = -\frac{P h^2}{6 E I} (4 + 5 \nu) x_1 - \frac{P}{2 E I} \left( l x_1^2 - \frac{x_1^3}{3} \right)$$

Ainsi la flèche à l'extrémité libre est :

$$u_2(l, 0) = -\frac{P h^2}{6 E I} (4 + 5 \nu) - \frac{P l^3}{3 E I}$$

Dans cette expression, le second terme correspond parfaitement à la valeur de la flèche donnée par la théorie élémentaire des poutres. Le premier terme apparaît donc comme un terme correctif vis à vis de cette théorie. **[8]**

## CHAPITRE III : GÉNÉRALITÉ SUR LA FONCTION D'AIRY

### III.3-Application de la fonction d'AIRY sur le modèle proposé :

On considère une poutre droite d'axe ( $O ; E_1$ ), de section rectangulaire (hauteur  $2h=50cm$ , épaisseur  $2b=30cm$ ). Cette poutre est simplement appuyée dans un massif à l'abscisse  $x_1=0$  à  $L=5m$ . On propose aussi un chargement à une charge concentrée au milieu de la poutre égale à (300KN). D'autre part on suppose que les forces de volume sont nulles. On suppose que l'épaisseur est très faible devant les autres dimensions de la poutre et qu'en conséquence, on peut faire l'hypothèse d'un état plan de contrainte.

Nous adoptons la fonction d'Airy suivante :

$$\varphi = \frac{P}{I} \left[ \frac{h^2}{2} x_1 x_2 + \frac{l}{6} x_2^3 - \left( \frac{x_1 x_2^3}{6} \right) \right] \quad \text{avec } I = [(2b)(2h)^3/12]$$

$$I = [(30)(50)^3/12] = 312500 \text{ cm}^4$$

On constate aisément que la fonction ainsi définie est bi harmonique. On peut alors déterminer l'état de contrainte obtenu :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} = \frac{P}{I} (l - x_1) x_2 \\ \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} = 0 \\ \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{P}{2I} (h^2 - x_2^2) \end{cases}$$

Cet état de contrainte est parfaitement compatible avec la condition de non chargement des faces supérieure  $x_2=h$  et inférieure  $x_2=-h$  de la poutre. Pour la section au milieu  $x_1=l/2$ , on obtient un torseur équivalent avec un moment nul au centre de surface et une résultante n'ayant qu'une composante :

$$\int_S \overline{T(M; E_1)} ds = -PE_2$$

On peut donc considérer que la poutre est sollicitée en flexion simple. Il est à noter que l'état de contrainte ainsi obtenu est parfaitement en accord avec la théorie élémentaire des poutres.

Il reste à vérifier les conditions aux limites sur les déplacements et en particulier la condition d'encastrement de la section  $x_1=0$ .

Il convient donc de calculer la forme générale du champ de déplacement. Toutefois, dans le cas d'élasticité plane, il n'est pas nécessaire d'utiliser la méthode générale avec la détermination du tenseur antisymétrique. L'intégration peut se faire directement à partir des relations déplacements-déformations.

Dans notre exemple nous avons le tenseur déformation suivant :

## CHAPITRE III : GÉNÉRALITÉ SUR LA FONCTION D'AIRY

$$\begin{cases} \delta_{11} = \frac{P}{EI} (l - x_1) x_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \delta_{22} = -\frac{\nu P}{EI} (l - x_1) x_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \delta_{12} = -\frac{(1+\nu)P}{2EI} (h^2 - x_2^2) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) \end{cases}$$

Les deux premières équations nous permettent d'écrire :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{P x_2}{EI} \left( l x_1 - \frac{x_1^2}{2} \right) + f(x_2) \\ u_2 = -\frac{\nu P}{EI} (l - x_1) \frac{x_2^2}{2} + g(x_1) \end{cases}$$

A partir de la troisième équation, on obtient :

$$\begin{cases} f(x_2) = -K x_2 + \frac{P}{2EI} \left[ (2+\nu) \frac{x_2^3}{3} - 2(1+\nu) h^2 x_2 \right] + K_2 \\ g(x_1) = K x_1 - \frac{P}{2EI} \left( l x_1^2 - \frac{x_1^3}{3} \right) + K_1 \end{cases}$$

Le champ de déplacement n'étant déterminé que par trois constantes, il est pratiquement impossible de respecter la condition d'encastrement pour tous les points de la section droite définie par  $x_1=0$ . Pour définir les constantes, on se contentera de donner leur valeur afin de respecter le non déplacement de certains points de la section origine. On peut écrire par exemple :

$$\begin{cases} u_1(0,0)=0 \\ u_2(0,0)=0 \\ u\left(0, \pm \frac{h}{2}\right)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_2=0 \\ K_1=0 \\ K = -\frac{P h^2 (4+5\nu)}{6EI} \end{cases}$$

On peut alors en déduire la déformée de la ligne moyenne ( $x_2=x_3=0$ ) :

$$u_2(x_1, 0) = -\frac{P h^2}{6EI} (4+5\nu) x_1 - \frac{P}{2EI} \left( l x_1^2 - \frac{x_1^3}{3} \right)$$

Ainsi la flèche au milieu de la poutre est :

### CHAPITRE III : GÉNÉRALITÉ SUR LA FONCTION D'AIRY

$$u_2\left(\frac{l}{2}, 0\right) = -\left(\frac{Ph^2 l}{12EI}\right) [4+5\nu] - \left(\frac{5Pl^3}{48EI}\right)$$

$$u_2\left(\frac{l}{2}, 0\right) = -\left(\frac{Pl}{12EI}\right) [h^2(4+5\nu) + (5l^2/4)]$$

application numérique :

$$u_2\left(\frac{l}{2}, 0\right) = -(3000000N \cdot 5000/12 \cdot 32164 \cdot 3125 \cdot 10^6) [250^2(4+5 \cdot 0,2) + (5 \cdot 5000^2/4)]$$

$$u_2\left(\frac{l}{2}, 0\right) = -39,25\text{mm}$$

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

### IV.1-INTRODUCTION :

Les résultats d'une simulation par éléments finis présentent toujours un écart avec la réalité, dont les causes peuvent être classées en deux catégories : **la modélisation**, c'est-à-dire le passage du réel à un problème mathématique défini dans le cadre d'une théorie, et les fautes dans l'application des règles de la théorie qui permettent de résoudre ce problème pour parvenir au résultat. Nous supposons ici qu'il n'y a pas de fautes et nous nous intéressons aux écarts dus à la modélisation par éléments finis.

Pour analyser ces écarts, il est commode de revenir à la définition première de la "méthode des éléments finis", c'est-à-dire de voir celle-ci comme une technique de *résolution approchée d'un problème de mécanique des milieux continus*. Cela conduit à considérer que les modèles par éléments finis du produit, de l'environnement et du comportement du matériau sont issus de *modèles continus* et, par conséquent, à classer les sources d'écart relevant de la modélisation en deux catégories :

- **la modélisation continue** : c'est-à-dire le passage de la réalité à un ensemble de modèles définis dans le cadre de la mécanique des milieux continus, définissant un "problème continu" insoluble.
- **la discrétisation** : c'est-à-dire la transformation des lois de la mécanique des milieux continus en lois "discrètes" dont la définition précise dépend des fonctions de base, c'est-à-dire du maillage ; cela transforme du même coup le "problème continu" insoluble en un "problème discret" soluble.

Chacune de ces catégories contribue à l'écart, qui s'écrit donc comme une somme de deux termes (Figure IV.1).

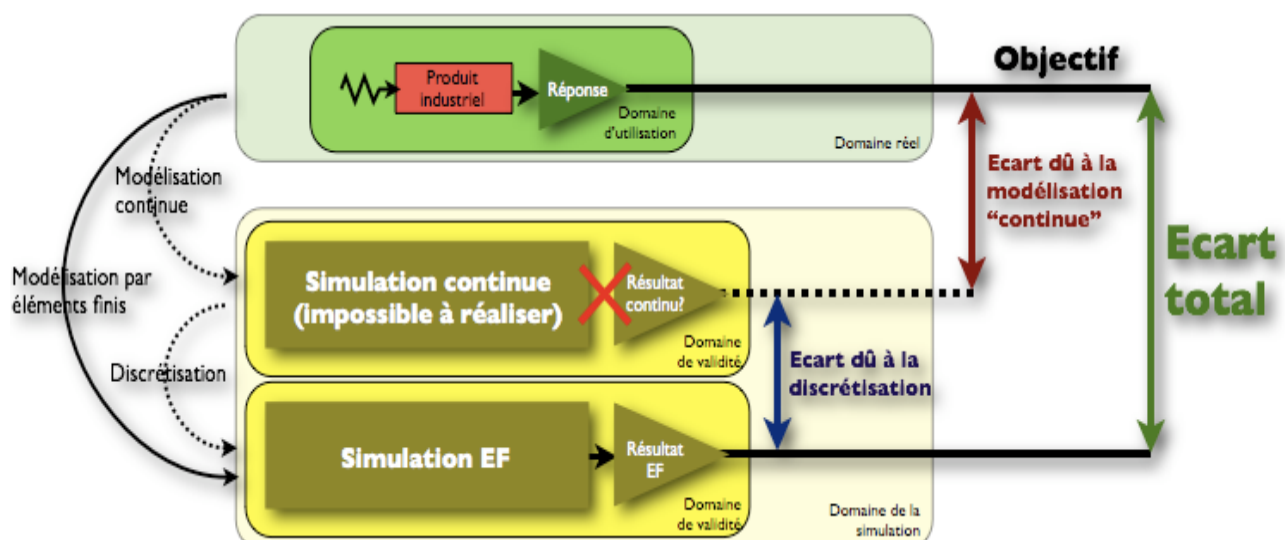


Figure IV.1 : Schématisation des sources d'écarts relevant de la modélisation : modélisation continue et discrétisation.[9]

Il s'agit naturellement d'une vue de l'esprit : en pratique, les utilisateurs modélisent *directement* le produit, son environnement et le comportement du matériau sous la forme demandée par le logiciel, sans passer par l'écriture académique d'un "problème continu" et de



## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

sa discrétisation. Ce point de vue permet cependant d'expliquer une différence fondamentale entre ces deux types d'écarts.

En effet, la discrétisation est une transformation purement théorique, étudiée par les mathématiques. Il existe ainsi des théorèmes décrivant l'écart dû à la discrétisation (en bleu sur la Figure IV.1), bien que le résultat continu lui-même soit impossible à déterminer.

L'intérêt pratique de ces théorèmes est double :

- d'une part, ils sont à la base d'outils et de méthodes semi-empiriques permettant d'estimer cet écart (ou au moins son ordre de grandeur) par le calcul,
- et d'autre part, ils assurent que cet écart peut être réduit autant que voulu à condition d'adapter la discrétisation, c'est-à-dire de raffiner suffisamment le maillage.

Par conséquent, un utilisateur expérimenté peut maîtriser l'écart dû à la discrétisation sans effectuer aucune expérimentation (mais à condition d'avoir du temps devant lui et de disposer d'un ordinateur suffisamment puissant pour atteindre la précision souhaitée !), comme l'explique la ressource ["La maîtrise de l'écart dû à la discrétisation par éléments finis"](#).

Il en va tout autrement en ce qui concerne la modélisation proprement dite, c'est-à-dire le passage du réel aux modèles : bien que le domaine de validité de certains modèles soit connu avec précision, l'écart dû à la modélisation (en rouge sur la Figure IV.1) n'est pas toujours prévisible sans recourir à l'expérimentation. En effet, cet écart résulte de multiples causes : présence d'incertitudes ou de variabilités, de simplifications... qui sont, par définition, non prises en compte lors de la modélisation, et son estimation nécessite de l'expérience et du savoir-faire.

### IV.2-Généralité sur le logiciel de la simulation :

**ANSYS** est le premier éditeur mondial dans le domaine du calcul par éléments finis. Les outils proposés permettent de résoudre les problèmes de validation produits de manière efficace et d'optimiser le processus de conception (gain de temps).

Les industriels conçoivent des produits plus innovants (intégration d'une pré-analyse dans le cycle de conception), de qualité plus élevée tout en minimisant les coûts. [10]

Le logiciel **ANSYS** a été développé par Dr. John Swanson, fondateur de la société ANSYS inc. Qui a son siège à Houston, PA, USA.

Il s'agit d'un outil de développement en analyse d'ingénieur. La méthode est celle des éléments finis.

Il est utilisé dans des domaines allant de l'automobile et l'électronique à l'aérospatial et à la chimie.

Le logiciel **ANSYS** permet la modélisation de structures, produits, composants et d'étudier leur réponses physiques telles que les niveaux de contraintes, les distributions de température ou l'effet de champ électromagnétique. [11]

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

### IV.3-Les principales étapes de la simulation :

La réalisation d'une simulation par éléments finis suit la démarche générale exposée dans la ressource "[La simulation du comportement des produits industriels](#)". Ici, nous nous bornons à présenter les particularités des éléments finis, découlant des concepts exposés ci-dessus, pour chacune des étapes de la démarche.

#### IV.3.1-Définir l'objectif :

Cette étape est primordiale car les éléments finis offrent un cadre extrêmement riche pour modéliser les produits, leurs environnements et les phénomènes qui s'y déroulent, plus encore que d'autres techniques de simulation. Le concepteur peut généralement effectuer de très nombreux choix susceptibles d'influer sur le résultat, et ces choix doivent être guidés en premier lieu par l'objectif de l'étude, qu'il s'agisse de la [finesse d'un maillage](#), de la [modélisation d'une action de contact](#), ou encore du comportement d'un matériau...

#### IV.3.2-Choisir une théorie et des modèles de comportements :

En éléments finis, la théorie est obtenue par la *discrétisation* d'une *théorie continue*, par exemple issue de la physique des milieux continus. Nous nous limitons ici à la statique des solides déformables en petites perturbations et à des modèles de comportements élastiques linéaires.

- La théorie continue peut être n'importe quelle théorie de la mécanique des milieux continus. En éléments finis (et, de manière générale, en simulation numérique), lorsque plusieurs théories conviennent, il est généralement judicieux de choisir *la plus simple*, car cela permet d'abaisser les coûts des calculs de façon parfois considérable sans pour autant nuire à la pertinence des résultats ; la ressource "[Simulations par éléments finis : modèles 1D, 2D ou 3D?](#)" illustre ce propos pour les théories des poutres et des coques.
- La [discrétisation](#), quant à elle, [dépend du maillage](#), c'est-à-dire du modèle du produit (étape 4).

#### IV.3.3-Choisir un solveur :

En statique linéaire, tous les logiciels d'éléments finis appliquent [la même méthode de simulation](#). En revanche, tous les logiciels ne proposent pas les mêmes [types d'éléments](#), ou encore les mêmes [modèles d'environnements](#). Le choix d'un logiciel peut donc influencer sur les résultats de la simulation, mais uniquement par le biais du choix des modèles. A cela s'ajoutent les considérations liées à l'ergonomie (qui peuvent être déterminantes, surtout en formation, vu la difficulté d'apprentissage de certains logiciels) et, naturellement, au coût.

#### IV.3.4-Modéliser le produit :

La plupart du temps, cette étape s'appuie sur une maquette numérique existante et fait appel à un mailleur automatique. La réalisation du maillage s'effectue alors en trois temps et consiste à :

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

- *adapter la géométrie* à la théorie utilisée (en extrayant la ligne moyenne dans le cas de la théorie des poutres ou en prenant en compte des symétries) et aux contraintes techniques de la méthode (en supprimant des petits détails trop difficiles à mailler, par exemple) ;
- *choisir le type et la taille des éléments* en fonction de l'objectif, de la géométrie à modéliser et de l'allure des champs à représenter ;
- *générer et contrôler* le maillage.

### IV.3.5-Modéliser l'action de l'environnement sur le produit :

En éléments finis, il s'agit souvent de la principale cause des écarts observés entre les résultats de la simulation et la réalité. En effet, de nombreux modèles d'environnement proposés dans les logiciels possèdent des domaines de validité très restreints, que les utilisateurs respectent rarement en pratique. Une méthode permettant, lorsqu'elle est applicable, d'éviter cet écueil est proposée [ici](#).

### IV.3.6-Calculer :

Cette étape est réalisée automatiquement par le logiciel et, sous les hypothèses de cette ressource, ne contribue généralement pas aux écarts. Toutefois, le [post-traitement des résultats](#) est régulièrement à l'origine d'erreurs d'interprétation, notamment en ce qui concerne les champs de contrainte, et peut masquer des écarts dus à la discrétisation.

### IV.3.7-Valider ou diagnostiquer :

Les logiciels de simulation comportent de nombreux outils d'aide au diagnostic, pouvant aider à éliminer ou maîtriser certaines sources d'écarts.

- En ce qui concerne la modélisation, la plupart des logiciels proposent des [outils semi-empiriques](#) capables d'aider l'utilisateur à maîtriser l'écart dû à la discrétisation.
- En ce qui concerne les fautes, les logiciels vérifient généralement que les modèles respectent les règles de la théorie (*ie.* un modèle non équilibré en statique ou un maillage invalide, par exemple, provoquent un message d'avertissement) et sont testés afin de ne pas commettre d'erreurs de calcul significatives.

L'utilisation de ces outils permet de faciliter le diagnostic : seules la modélisation proprement dite (c'est-à-dire le passage du réel aux modèles) et certaines fautes de l'utilisateur (dont, notamment, l'interprétation des résultats) restent fondamentalement hors de portée des logiciels.

Dans la liste ci-dessus, nous avons omis l'étape d'observation/identification des phénomènes, étant donné qu'elle ne présente aucune particularité par rapport aux autres techniques de simulation. A la place, nous avons fait figurer la définition de l'objectif qui, quant à elle, guide fortement chacun des choix effectués lors de la modélisation, plus encore que dans d'autres techniques.

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

### IV.3.8-Bilan :

Les différentes étapes de la simulation, ainsi que les concepts correspondants, sont récapitulés sur la Figure (IV.2). [9]

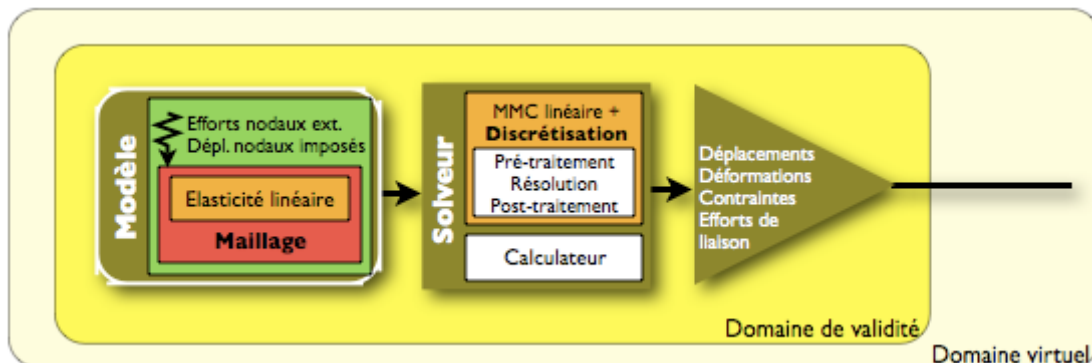


Figure IV.2 : Schéma récapitulatif des principales étapes et des principaux concepts de la simulation par éléments finis. [9]

### IV.4- présentation de travail :

Dans ce chapitre nous présentons des exemples d'application sur le calcul d'une poutre en béton. Les calculs seront menés à l'aide du logiciel ANSYS version 12.

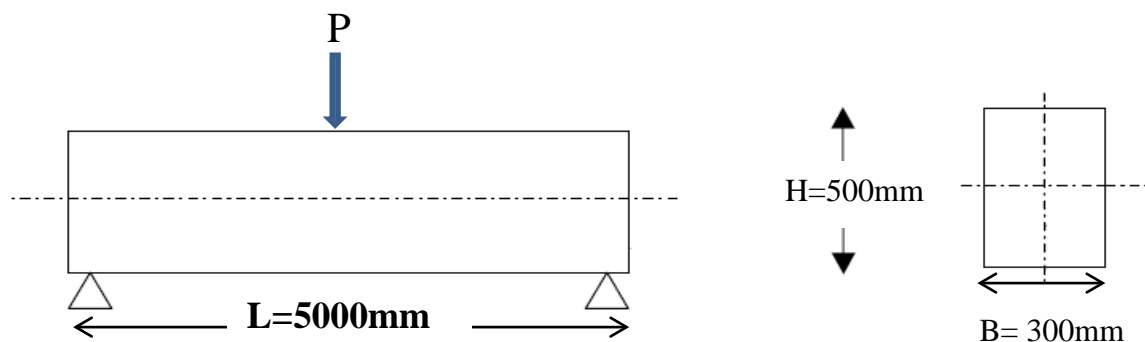


Figure IV.3 : schéma de la poutre étudiée

Pour notre projet de fin d'étude on a proposé d'étudier une poutre à des caractéristiques géométriques suivantes :

H : la retombée de la poutre.  $H=500\text{ mm}$ .

B : la largeur de la poutre.  $B=300\text{ mm}$

L : la longueur de la poutre.  $L=5000\text{ mm}$

La charge appliquée sur la poutre est une charge concentrée égale à  $300\text{ KN}$  ; elle est appliquée au milieu de la poutre ( $L/2$ ) ; et la figure (IV.3) montre les dimensions de la poutre étudiée.

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

Le but de cet exemple est l'étude de la déformation et la contrainte déformation par :

1) La variation des dimensions de maillage pour cela on va proposer les 2 dimensions de maillage suivant :

N°	Type de maillage	Dimension selon X (mm)	Dimension selon Y (mm)	Dimension selon Z (mm)
Disc 01	quadratique	50	50	50
Disc 02	quadratique	100	100	100

Tableau IV.1 : Dimension du maillage proposé.

2) La variation des caractéristiques des matériaux ( $f_{ck}$ ) et on va proposer les trois cas de valeurs de ( $f_{ck}$ ) suivantes :

N°	$f_{ck}$ (MPa)
1 <sup>er</sup> cas	21
2 <sup>ème</sup> cas	25
3 <sup>ème</sup> cas	33

Tableau IV.2 :  $f_{ck}$  proposé.

### IV.5- caractéristique des matériaux :

#### IV.5.1. Le béton :

Le béton est un matériau constitué par un mélange, dans des proportions plus ou moins constantes du ciment, du granulat et de l'eau de gâchage, c'est plutôt produire un matériau d'une parfaite homogénéité, d'une bonne consistance.

##### IV.5.1.1. La Résistance Caractéristique du Béton :

- En compression ( $f_{cj}$ ) : C.B.A 93 (A: 2-1-1-1).

La résistance caractéristique à la compression a l'âge de 28 jours :  $f_{c28} = 25 \text{ MPa}$ .

A un âge:  $j < 28$  jours  $f_{cj} = \frac{j}{4,67 + 0,83j} f_{c28}$ . Pour  $f_{c28} \leq 40 \text{ MPa}$

- En traction ( $f_{tj}$ ) : C.B.A 93 (A: 2-1-1-2).

La résistance caractéristique à la traction :  $f_{t28} = 2,10 \text{ MPa}$ .

Déduite de la formule:  $f_{tj} = 0,6 + 0,06 f_{cj}$

##### IV.5.1.2. Déformation longitudinale du béton :

- Déformation instantanée ( $E_{ij}$ ) : C.B.A 93 (A: 2-1-2-1).

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

Sous des contraintes normales d'une durée d'application inférieure à 24 heures, le module de déformation longitudinal instantané ( $E_{ij}$ ) de béton est :

$$E_{ij} = 11000 \sqrt[3]{f_{cj}} \text{ MPa. Dans notre cas } E_{ij} = \mathbf{32164,2 \text{ MPa.}}$$

- Déformation différée ( $E_{vj}$ ) : C.B.A 93 (A: 2-1-2-2).

Les déformations différées du béton comprennent le retrait et le fluage ; on considère dans les calculs que les effets de ces deux phénomènes s'additionnent sans atténuation, A défaut de mesures on admet que sous les contraintes de longue durée d'application les déformations longitudinales complémentaires dues au fluage du béton sont doubles de celles dues aux mêmes contraintes supposées de courte durée et appliquées au mêmes âge.

Dans ce cas le module de déformation longitudinale différée est donné par la formule:

$$E_{vj} = 3700 \sqrt[3]{f_{cj}} \text{ MPa, Dans notre cas : } E_{vj} = \mathbf{10818,8 \text{ MPa.}}$$

- Coefficient de POISSON : C.B.A 93 (A: 2-1-2-3).

Le coefficient de POISSON est le rapport entre la déformation relative transversale et la déformation relative longitudinale, il est donné par la formule suivante :

$$\nu = \frac{\Delta d / d_0}{\Delta L / L_0}$$

Les règles de BAEL 91 donnent pour les valeurs de coefficient de poisson :

Pour le calcul des déformations:  $\nu = \mathbf{0,2. [12]}$

### IV.5.1.3. Diagramme déformations –contraintes du béton simulé:

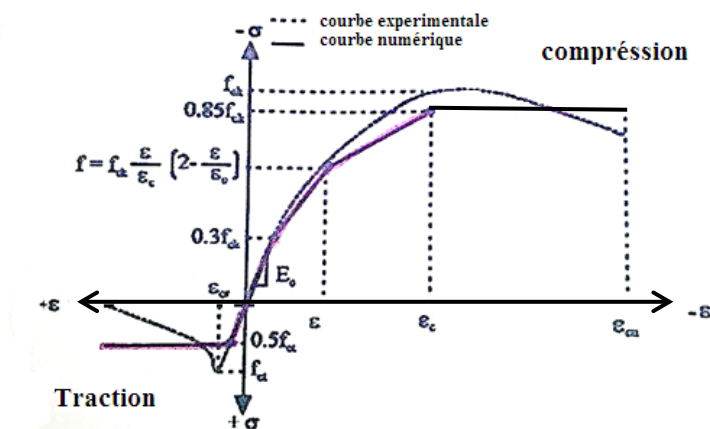


Fig IV.4 : Diagramme contrainte-déformation d'un béton.

Le modèle utilisée pour le béton est de forme multilinéaire en compression et bilinéaire en traction. La particularité principale du béton est de ne pas présenter le même comportement en

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

compression et en traction ; son comportement à la traction est différent de son comportement en compression à cause de sa faible résistance à la traction .la figure (IV.4) présente l'allure de la courbe expérimentale et numérique (contrainte –déformation) d'un béton normal ayant une résistance à la compression sur cylindre  $f_{ck}$  et une résistance à la traction  $f_{ct}$ .

$\varepsilon_c$  : Déformation correspondant à la résistance maximale  $f_{ck}$  .

$\varepsilon_{cu}$  : Déformation ultime correspondant à la rupture du béton comprimé.

$E_c$  : Module d'élasticité.

$V_u$  le comportement non linéaire du béton, le module d'élasticité doit être interprété comme un module sécant moyen des contraintes de courte durée notée  $E_{cm}$  .selon l'Eurocode 2,  $E_{cm}$  peut être établi à l'aide de la relation suivante :  $E_{cm}=9500(f_{ck} +8)^{1/3}$

Avec : ( $E_{cm}$  en  $N/mm^2$  ;  $f_{ck}$  en  $N/mm^2$  ). [13]

### IV.6- la modélisation du modèle proposé :

#### IV.6.1-Introduction :

Dans tout ce qui suit, nous développerons les étapes à suivre afin de préparer un fichier de données ANSYS. Généralement, ces étapes peuvent être classées en trois parties qui sont :

- La définition du problème ou *preprocessing* (définition de la géométrie, types des éléments, propriétés des matériaux, maillage)
- L'application des chargements et des conditions aux limites et résolution qui se trouve dans la rubrique solution (spécification du chargement, des conditions aux limites, et enfin résolution du système d'équation par la méthode de Newton-Rafeson).
- Affichage des résultats dans la rubrique *postprocessing* (il est possible de voir les déplacements nodaux, forces intérieures et moments, formes de la déformée, diagramme des contraintes.....)

À titre d'exemple, considérons la modélisation tridimensionnelle d'une poutre en béton simplement appuyée.

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

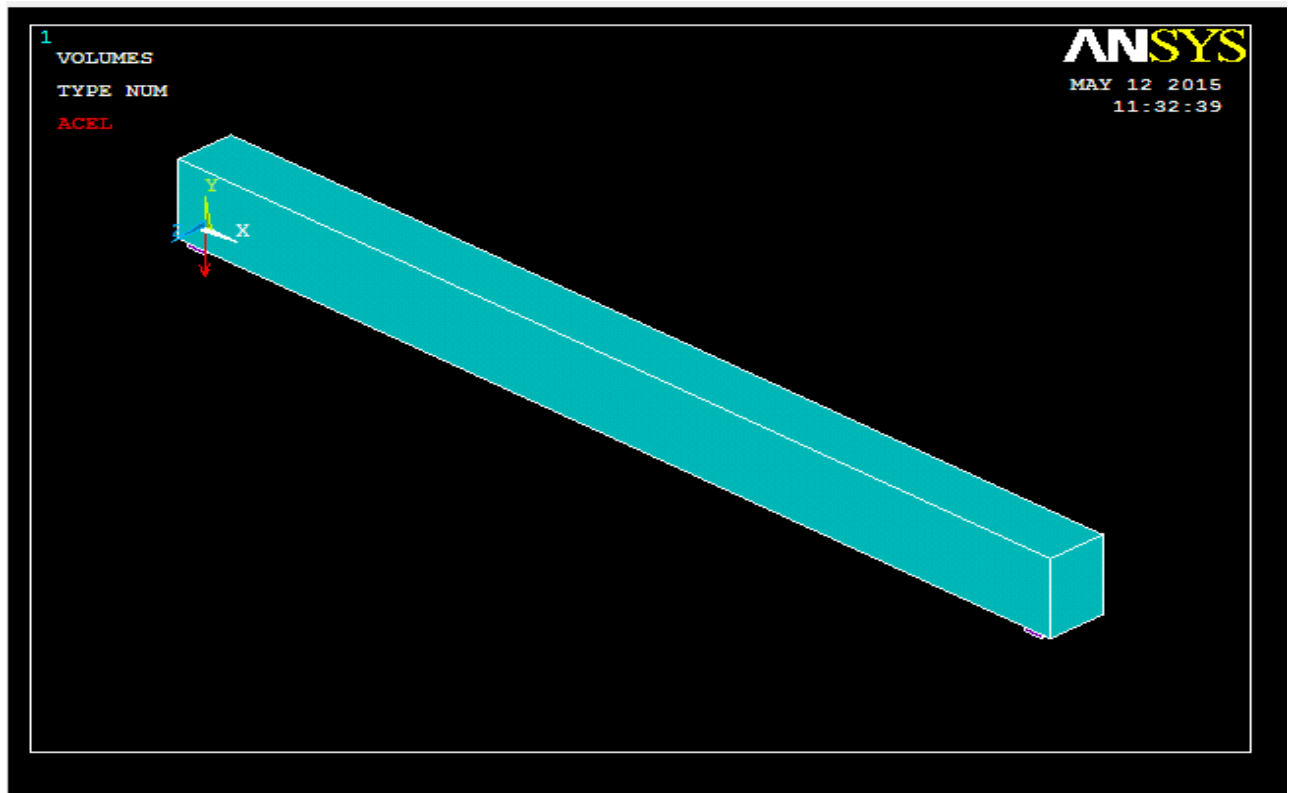


Fig IV.5 : la poutre étudiée modélisé en 3D.

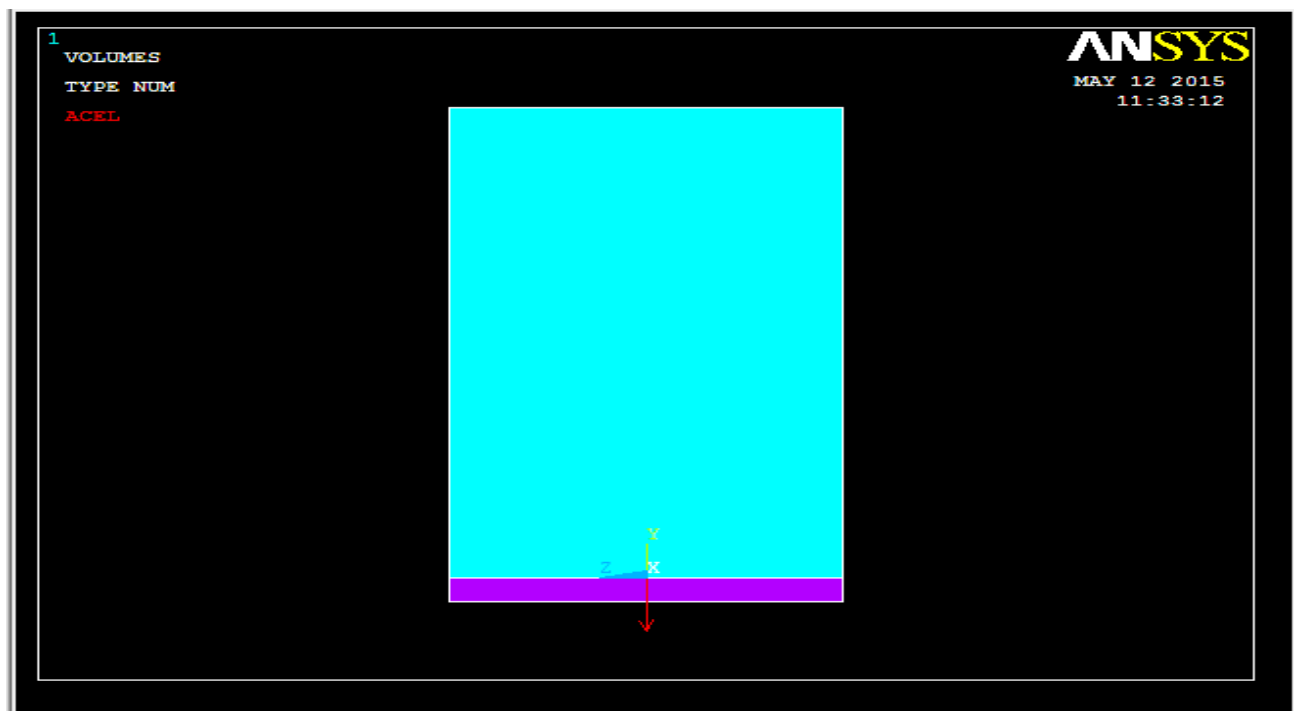


Fig IV.6: la poutre étudiée modélisé en sens Y et Z.



## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

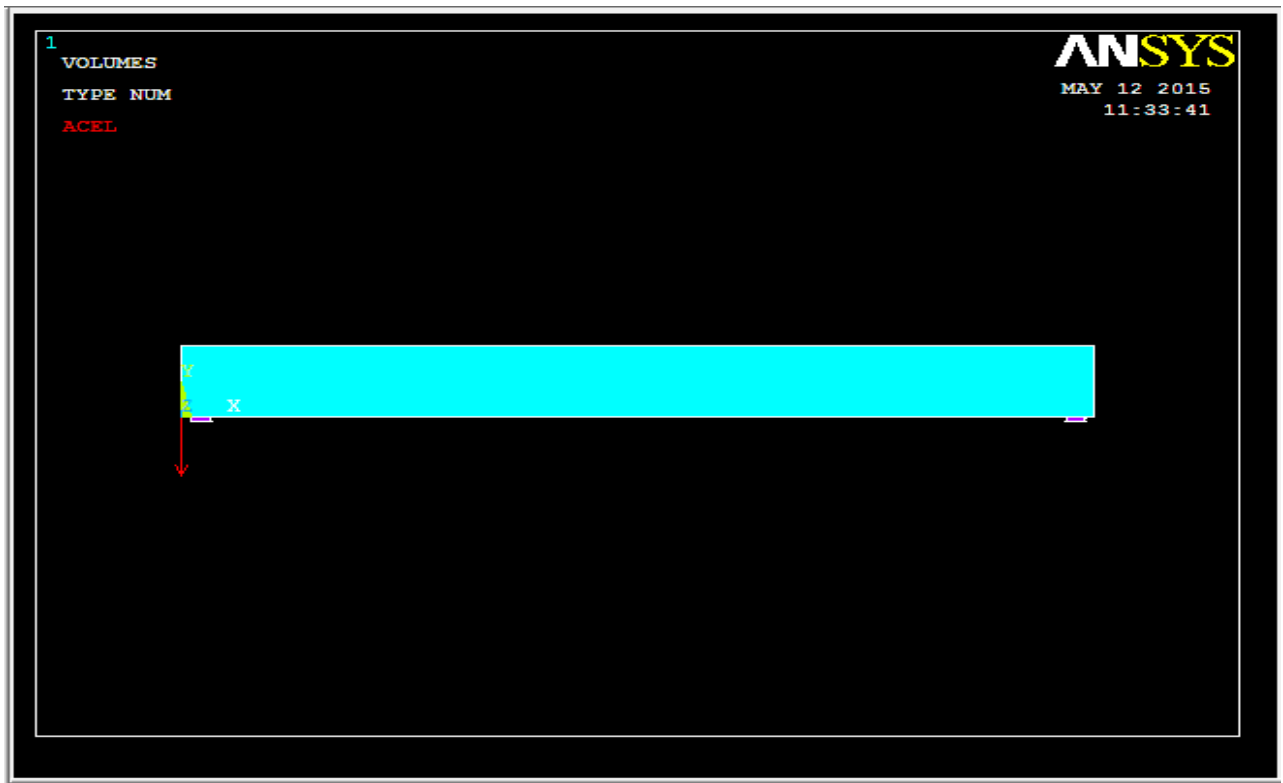


Fig IV.7: la poutre étudiée modélisé en sens X et Y.

### IV.6.2-Définition du problème-*postprocessing*:

Avant de commencer, il est indispensable de présenter la fenêtre du code de calcul ANSYS :

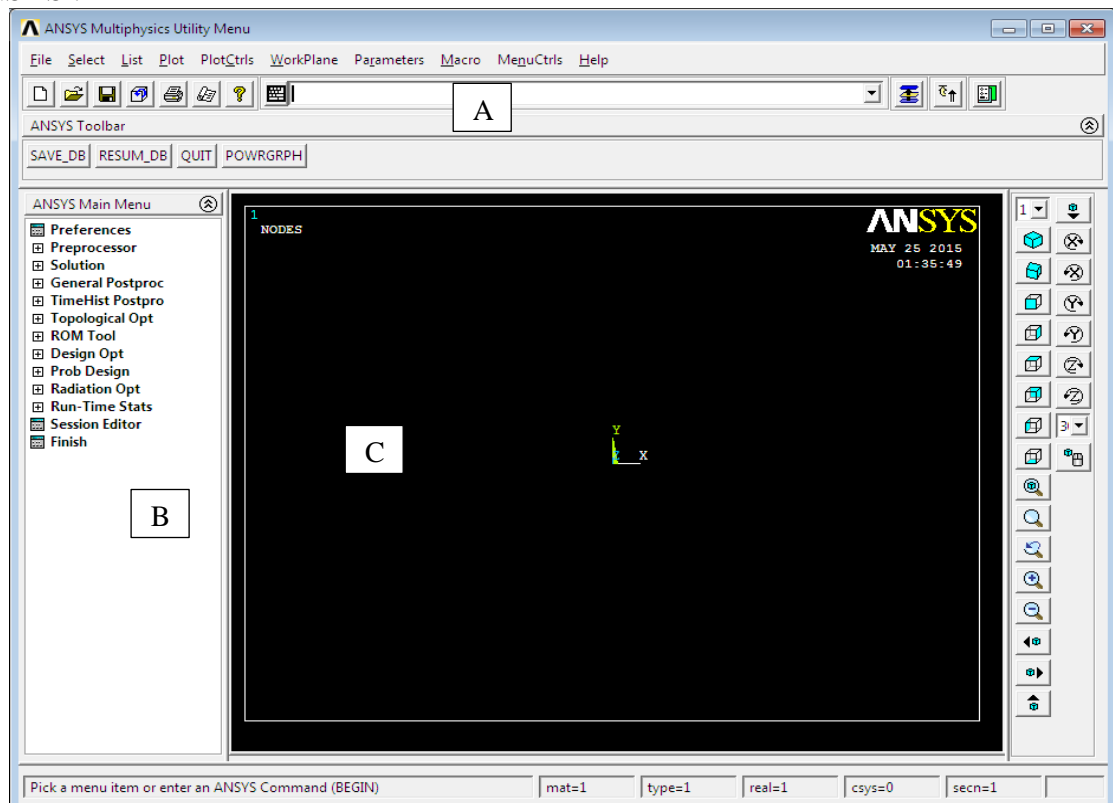


Fig IV.8 : Fenêtre du logiciel ANSYS.

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

(A) **Utility Menu** : conteint des fonctions comme les contrôles des fichiers des sélections,des graphiques et des paramètres.

(B) **Main menu** : conteint les fonctions des base d'ANSYS comme preprocessor, solution, généra postprocessor et autres c'est-à-dire la majorité des fonctions de modélisation.

(C) **Fenêtre graphique** : est l'endroit ou le graphique est affiché,ou la sélection du graphique est possible,ou on peut voir le modèle dans ses différents étapes de construction et la ou on peut afficher les résultats de l'analyse.

### IV.6.1.1-Titre:

Il s'agit de nommer le fichier.

Dans *l'utility menu*, cliquer sur *file >change title* : Beam par exemple.  
Il est très important d'enregistrer le travail à chaque étape de sa création. Pour enregistrer le modèle :

Dans *l'utility Menu*, cliquer sur *file > save as jobname.db*  
Le fichier sera enregistré sous le nom de (*jobname.db*) et pour le mettre à jour, il suffit de cliquer sur *Save*.

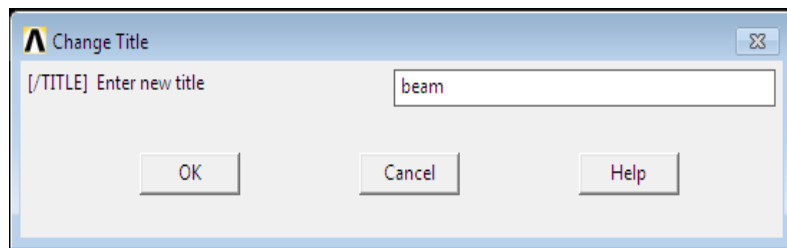


Fig IV.9 : Nomination du travail.

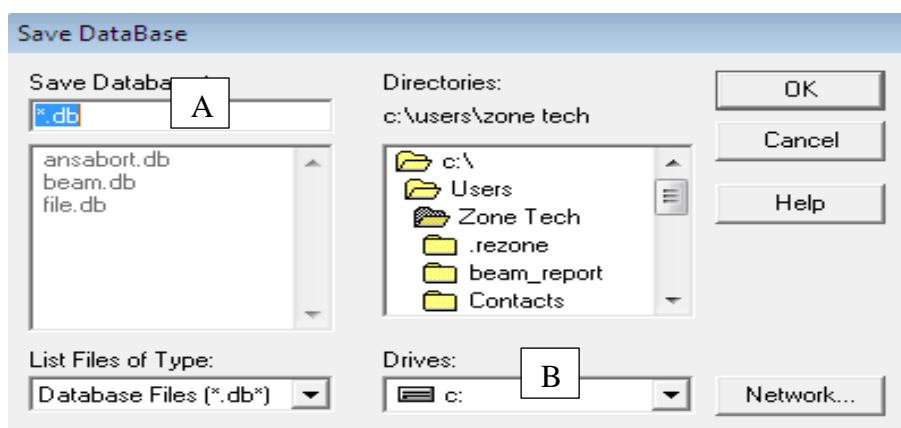


Fig IV.10 : Enregistrement dans l'ANSYS.

(A) Donner le jobname.db.

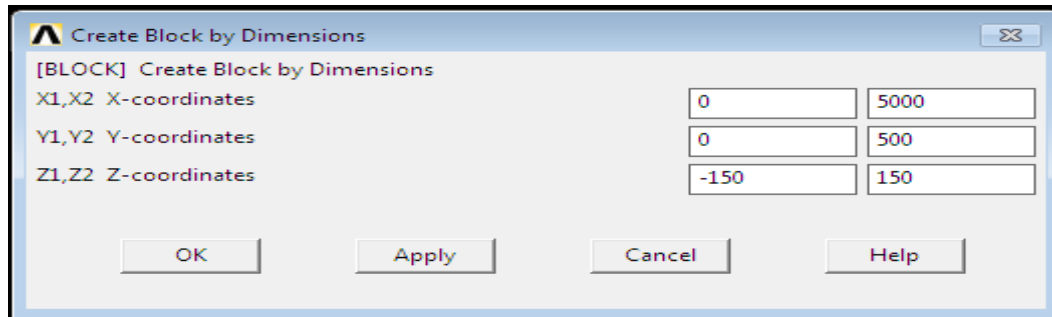
(B) La partition du disque ou l'on enregistre le fichier.

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

### IV.6.1.2-Création de la géométrie du modèle:

D'une manière générale, la géométrie du modèle est constituée par un ensemble de lignes, d'aires et volumes. En ce qui concerne notre exemple, il s'agit d'un ensemble de volume.

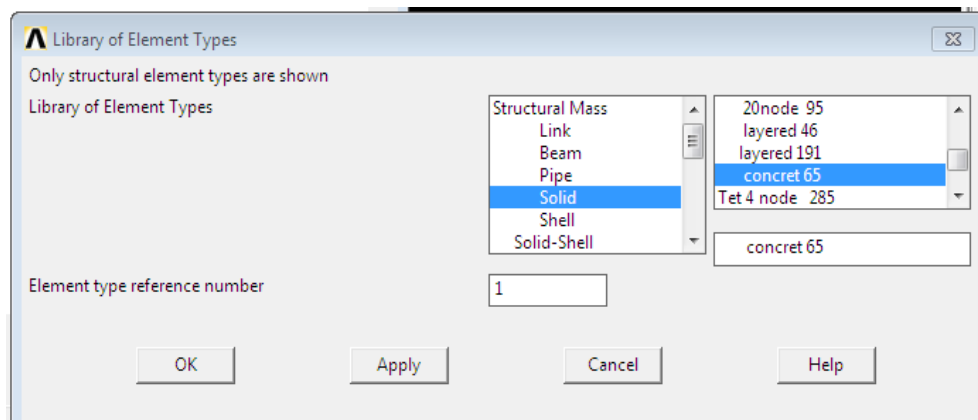
*Main Menu>Preprocessor>Modeling>Create> Volumes> Block>By dimension.*



**Fig IV.11: Définition des volumes.**

### IV.6.1.3-Définir type d'éléments:

Comme le titre l'indique, il s'agit de définir les types d'éléments finis à utiliser.



**Fig IV.12 : Définition de type d'élément.**

### IV.6.1.4-Propriété des matériaux:

On définit la courbe de comportement de chaque matériau constituant le modèle dans le domaine linéaire ainsi que dans le domaine non linéaire.

Pour définir le comportement d'un matériau dans le domaine linéaire :

*Main Menu>Preprocessor>Matériau Props (Matériau Properties)>Matériau Models> Double clique sur Structural> Lineair>Elastic>Isotropic.*

On définit les propriétés de matériau :

- Matériau de béton :E=20000 (en MPA) (module d'élasticité)
- $\nu = 0,2$  (Coefficient de Poisson)

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

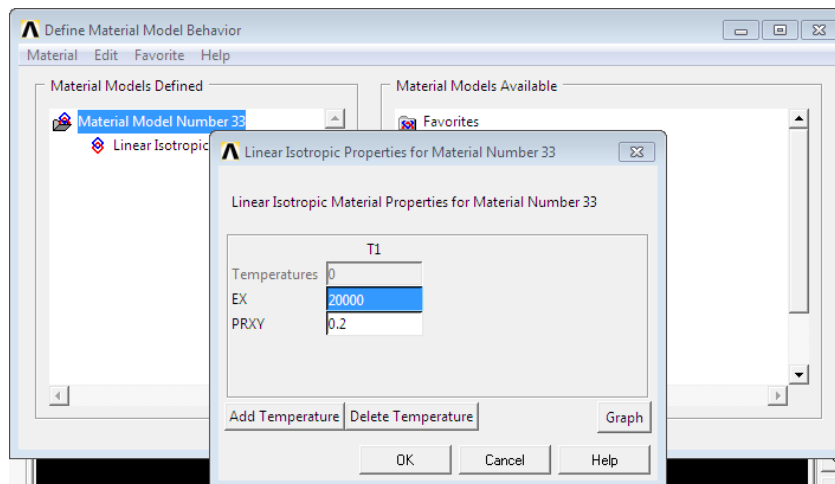


Fig IV.13 : Définition des propriétés d'un matériau dans le domaine linéaire.

Dans le domaine non linéaire :

Double cliquer sur *Structural>Non Linéaire>Inelastic>Non-Metal Plasticity>Concrete*.

Double cliquer sur *Structural>Non Linéaire>Inelastic>Rate Independant>Mises Plasticity>Multilinéaire*.

On doit faire entrer les contraintes (*stress*) et les déformations (*strain*) correspondantes en ajoutant des points (*Add Point*).

### IV.6.1.5-Attribution des propriétés de chaque élément:

Cette partie consiste à attribuer à chaque élément géométrique ses propriétés :  
*Main Menu>Preprocessor>Meshing>Mesh Attribute>Picked Volume*

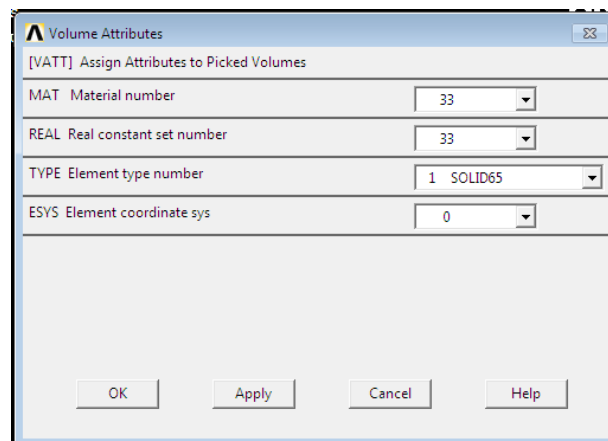
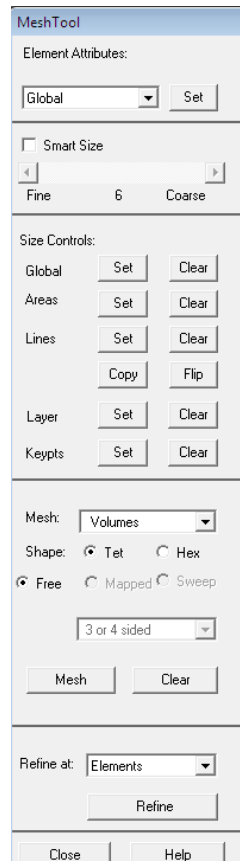


Fig IV. 14: Attribution des propriétés d'un élément.

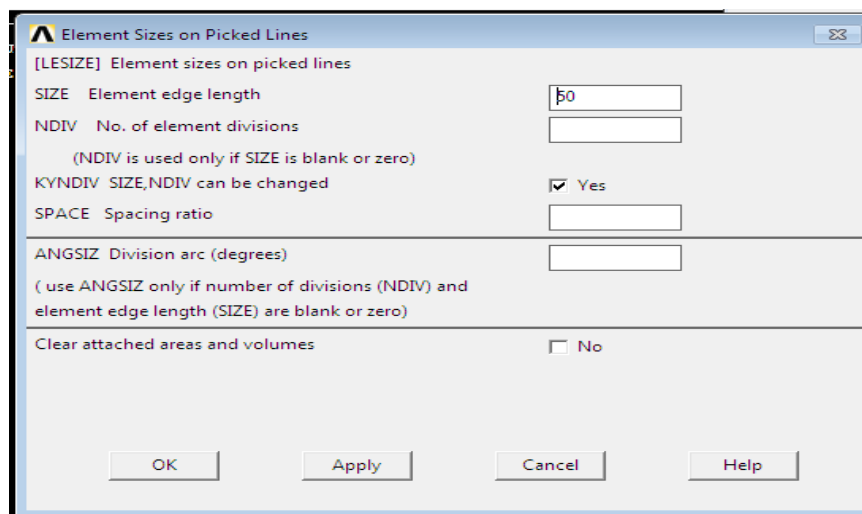
### IV.6.1.6-Maillage:

Cette rubrique consiste à définir le maillage de chaque volume sélectionné.

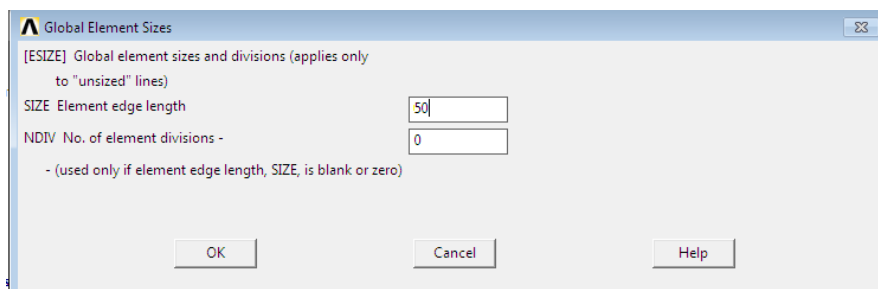
## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.



**Fig IV.15 : Meshtools**



**Fig IV. 16: Définition du maillage (size controls lines).**



**Fig IV.17 : Définition du maillage (size controls volume).**

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

On a choisi pour ce modèle-ci : 2 modèles de maillage ces types sont :

Le 1er modèle de maillage c'est : maillage quadratique.

Les dimensions de chaque élément sont comme suit :

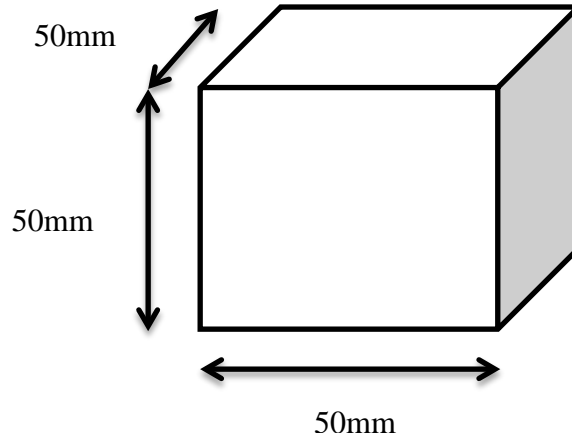


Fig IV.18 : dimensions d'une maille quadratique de 1<sup>er</sup> modèle.

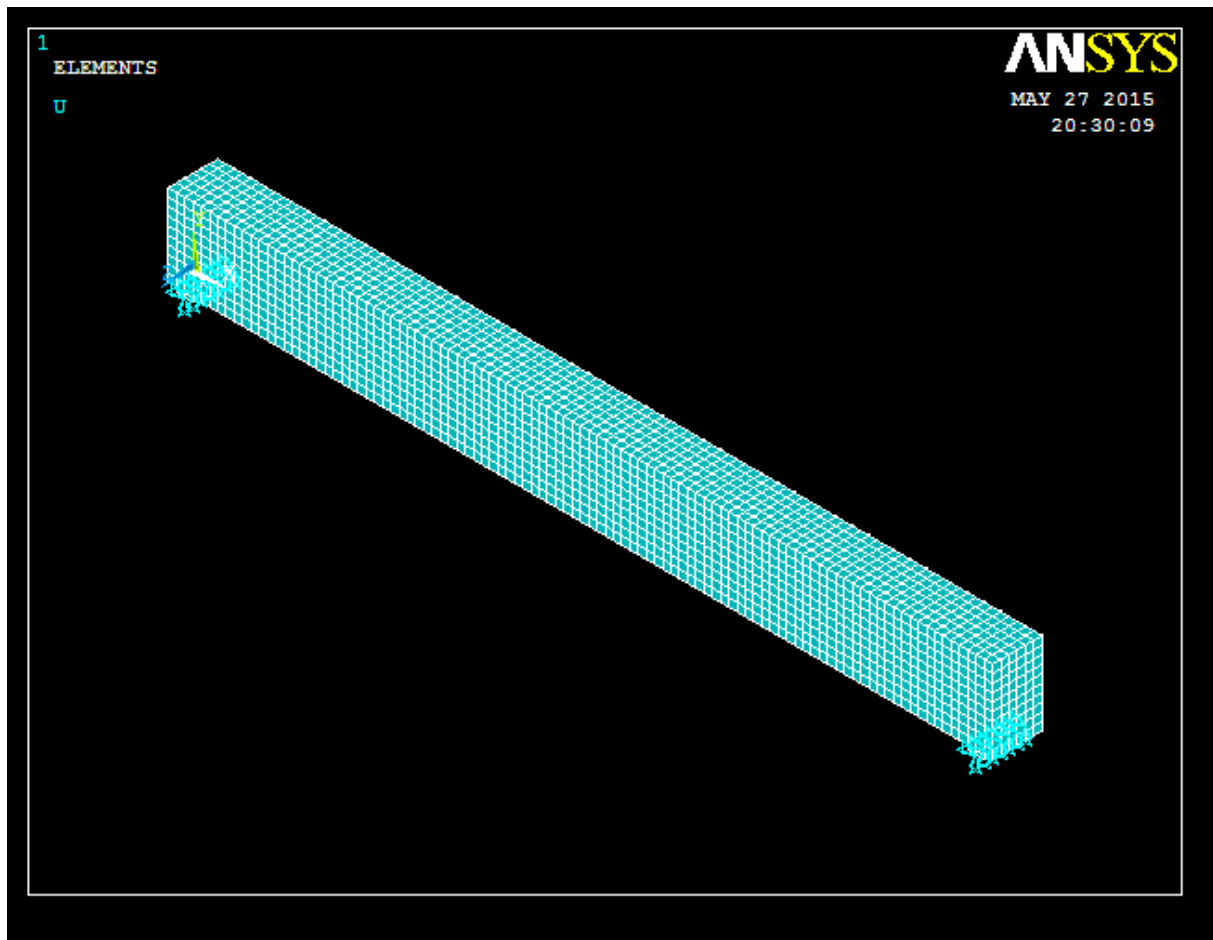


Fig IV.19 : la poutre étudiée discrétisée en 3D du 1<sup>er</sup> modèle.

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

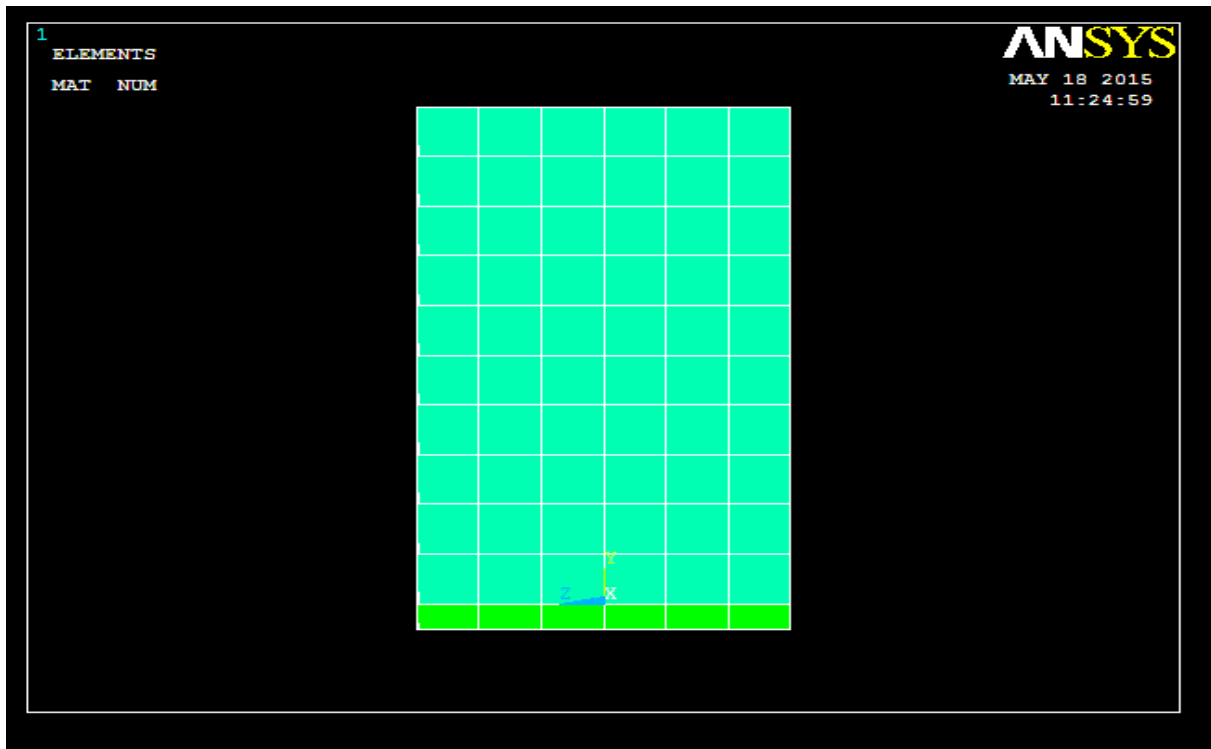


Fig IV.20 : la poutre étudiée discrétisé sens Y Z du 1<sup>er</sup> modèle.

Le 2<sup>ème</sup> modèle de maillage c'est : maillage quadratique.

Les dimensions de chaque élément sont comme suit :

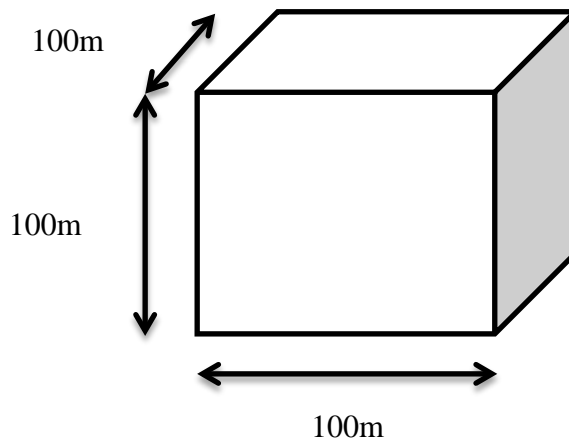


Fig IV.21 : dimensions d'une maille quadratique de 2<sup>ème</sup> modèle.

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

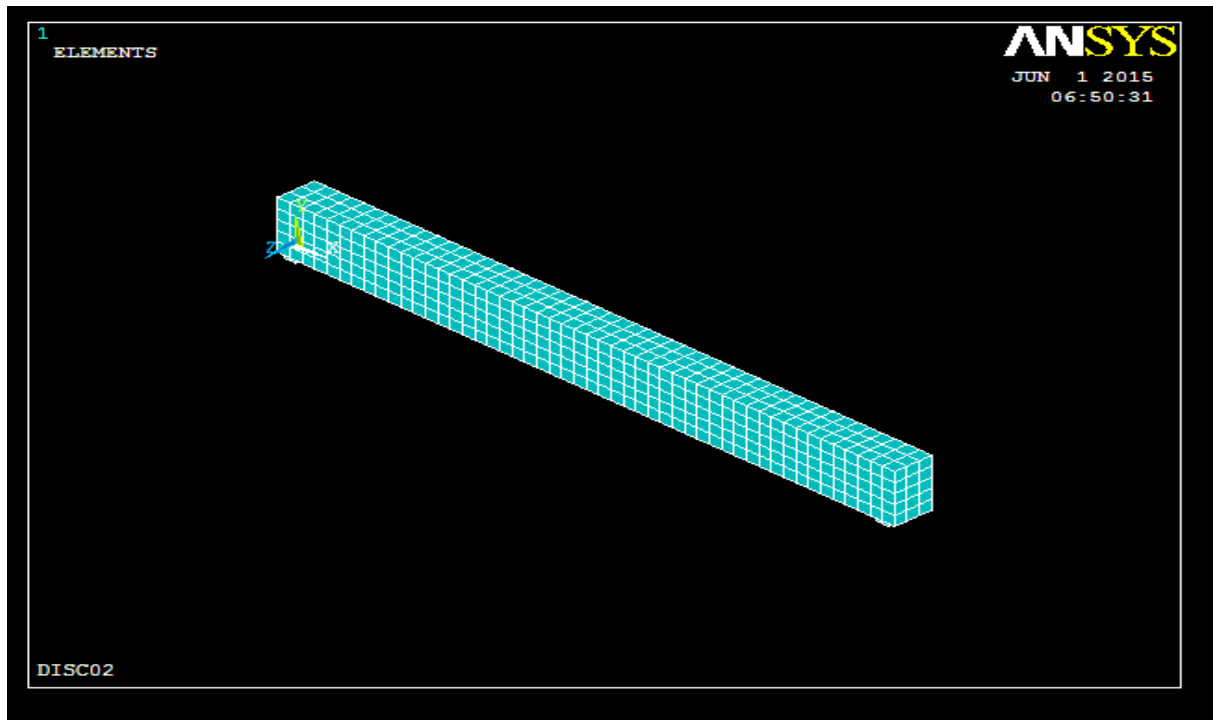


Fig IV.22 : la poutre étudiée discrétisé en 3D de 2<sup>ème</sup> modèle.

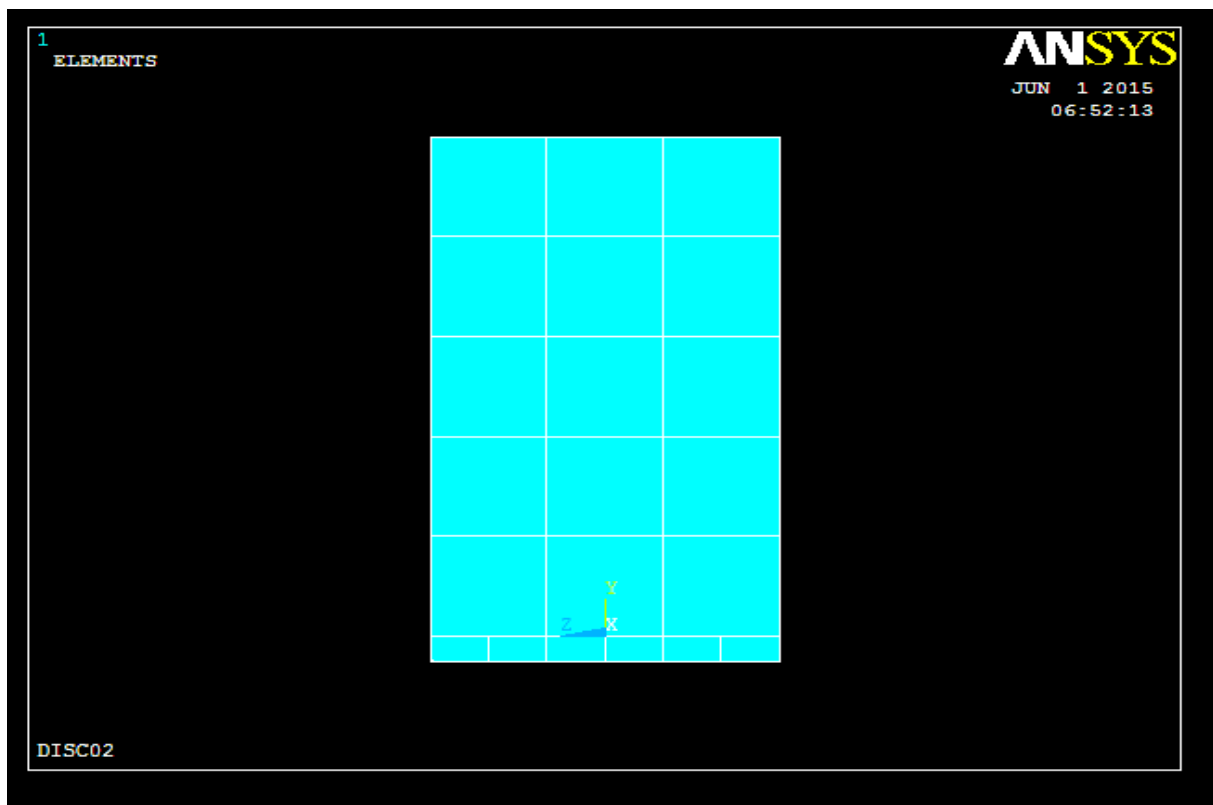


Fig IV.23 : la poutre étudiée discrétisé sens YZ de 2<sup>ème</sup> modèle.



## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

### IV.6.1.7-Solution:

#### IV.6.1.7.1-Type d'analyse:

Avant de commencer la résolution des systèmes d'équations, il est nécessaire de définir le type d'analyse (statique dans notre cas), et régler les paramètres de résolution.

*Main Menu>Solution>Analysis type>New Analysis>Static.*

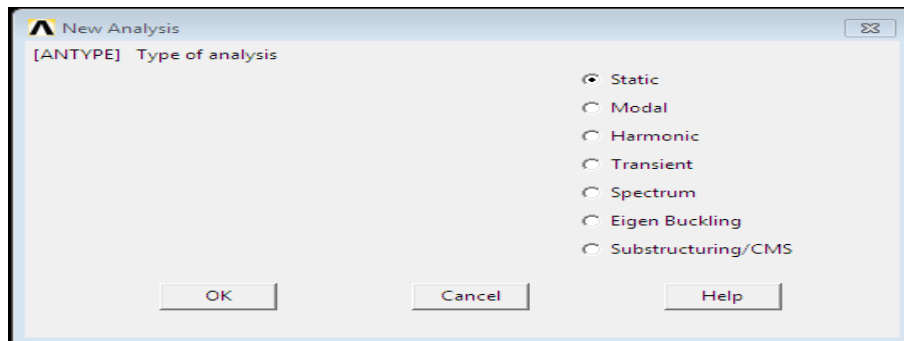


Fig IV.24 : Type d'analyse.

Pour les paramètres de résolution, on peut régler les nombres d'itération minimale et maximale, limiter les critères de convergences, activer (Automatic Time Stepping),.....

*Main Menu>Solution>Analysis type>Sol'n Controls.*

#### IV.6.1.7.2-Conditions aux limites:

Les nœuds à la base de la poutre sont bloqués dans les deux directions X et Y pour les deux appuis, parce que nous avons proposé la poutre est simplement appuyée.

Pour cela : sélectionner les nœuds concernés>*Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Displacement>On Nodes* >Sélectionner les nœuds et Spécifier les conditions aux limites.

#### IV.6.1.8 –Application des charges:

Sélectionner les nœuds ou les charges sont appliquées>*Main Menu>Solution>Define Loads>Apply>Structural>Force/Moment>On Nodes>Sélectionner un nœud>Donner la direction, le sens et valeur de la charge comme indiqué sur la figure suivante :*

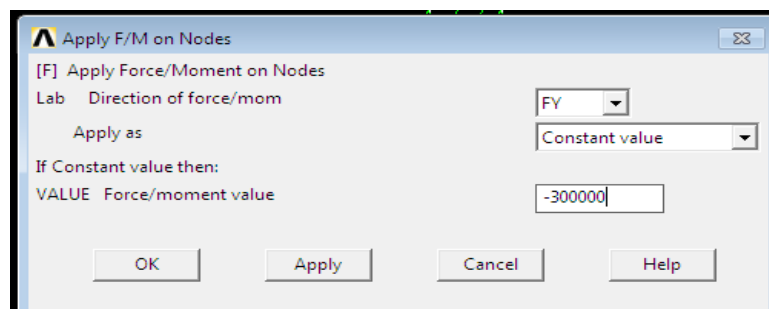


Fig IV.25 : Définition de chargement.

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

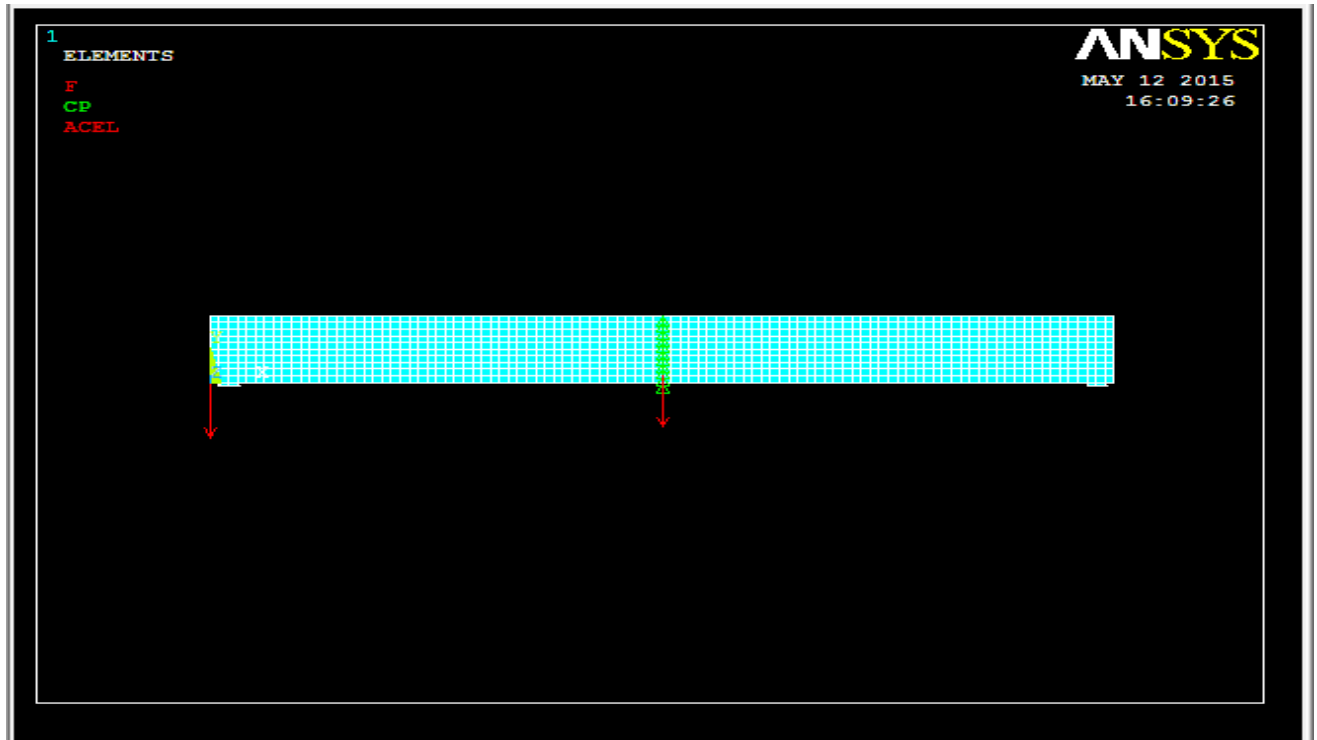


Fig IV.26 : la poutre étudiée discrétisée sous une charge concentrée sens X et Y.

### IV.6.1.9-résolution du système :

*Main Menu>Solution>Solve>Current LS>OK.*

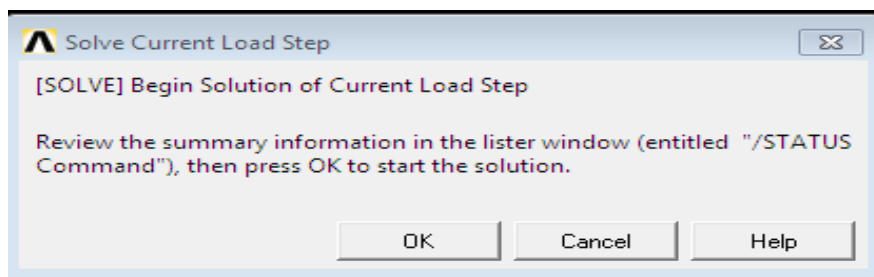


Fig IV.27 : Solve Current Load Step.

### IV.6.1.10-Les résultats obtenus(*Postprocessing*) :

Cette rubrique nous permet d'afficher tous les résultats.

*Main Menu>General postprocessing> Read Result>Last Set>Plot Result.*

A partir de là, il est possible divers types de résultat:

#### IV.6.1.10.1-forme de déformée :

*.....>Plot Result>Deformed Shape.*

## CHAPITRE IV : SIMULATION DU MODELE PROPOSÉ.

### IV.6.1.10.2-Contraintes :

Il est aussi possible d'obtenir la distribution des contraintes.

.....>Plot Result>

### IV.7- Conclusion :

La modélisation proposée présente pour avantage principal d'étudier l'effet de la discrétisation et la modélisation matériel sur le comportement d'une poutre en béton simplement appuyée.

Ce travail traite les aspects particuliers à la modélisation numérique des déformations et des contraintes de déformation induites dans l'élément fini et la poutre en générale.

On a traité ce modèle on deux étapes :

- par la variation des dimensions de maillage.
- Par la variation de caractéristique matériel du béton ( $f_{ck}$ )

La simulation numérique a été effectuée de manière à reproduire le plus fidèlement possible (géométrie, conditions aux limites, loi de comportement des matériaux et mode de chargement).

À partir de cette simulation on tire les conclusions suivantes :

- ✓ Le modèle numérique par éléments peut remplacer la procédure expérimentale qui est difficile est couteuse.
- ✓ À l'aide du modèle numérique, on peut effectuer plusieurs études paramétriques pour mettre en évidence l'influence de tous les paramètres importants.

# CHAPITRE V : INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS OBTENUS .

## CHAPITRE V : INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS OBTENUS.

### V.1-INTRODUCTION :

Ce chapitre est consacré à l'analyse des résultats obtenus lors des différentes simulations.

Les résultats sont présentés sous forme de tableaux et de graphes.

### V.2-LES RESULTATS OBTENUS :

L'étude numérique de notre modèle proposé donne des résultats on va présenter dans les figures et les tableaux suivantes :

Dans le chapitre précédent on a proposé d'étudier l'effet de la variation:

- 1) des dimensions de maillage pour cela on va proposer d'étudier 2 modèles de dimensions de maillage et cette simulation donne les résultats suivants :
  - ❖ Pour le 1<sup>er</sup> modèle la poutre discrétisée en éléments finis de dimensions 50 x50 x50 mm<sup>3</sup> le nombre des éléments dans ce cas égal à 6000 éléments.

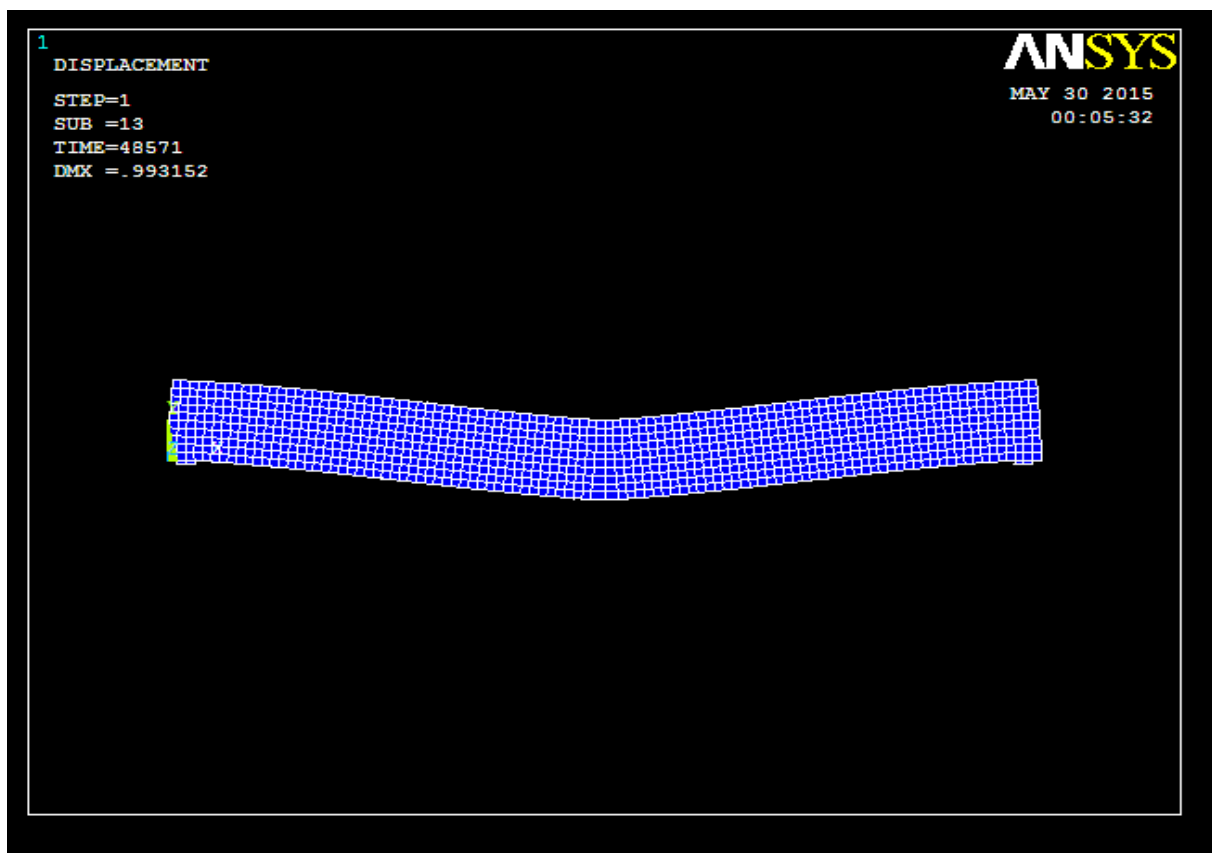


Fig V.1 : la déformation de la poutre pour 1<sup>er</sup> modèle de discrétisation.

## CHAPITRE V :INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS OBTENUS .

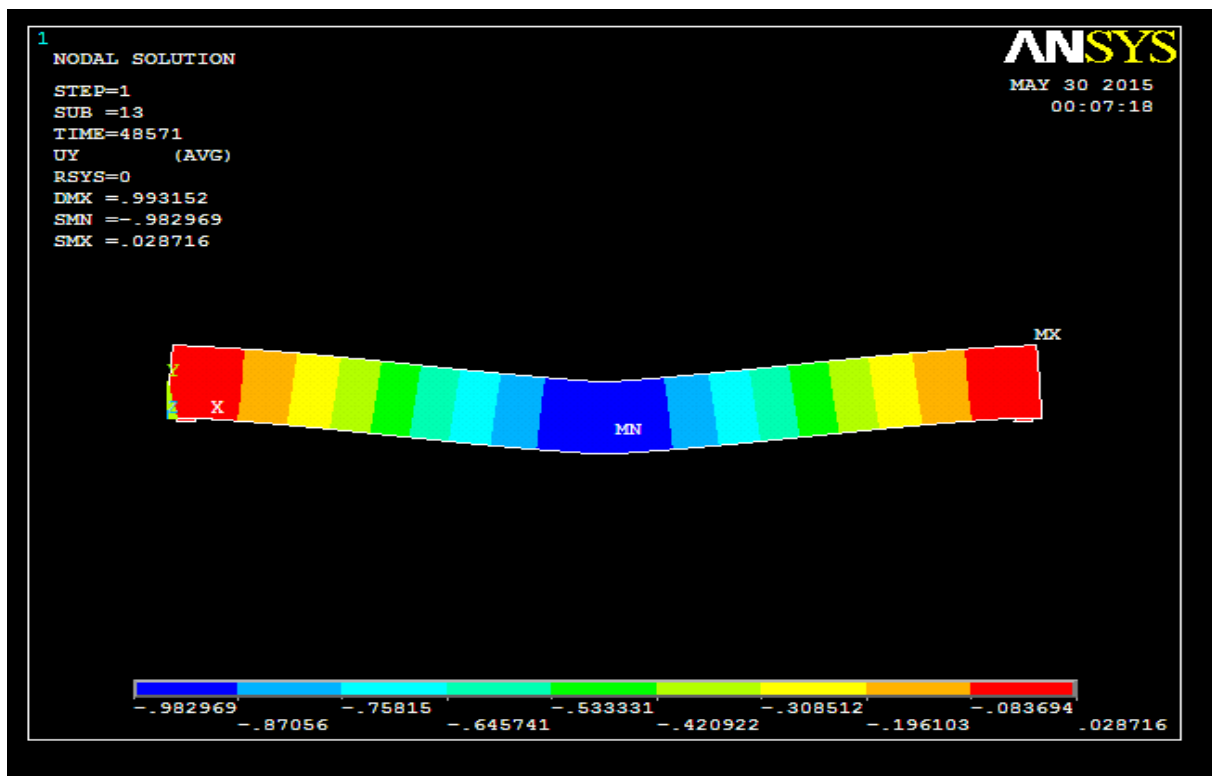


Fig V.2 : les contraintes de déformation de la poutre pour 1<sup>er</sup> modèle de discrétisation.

- ❖ Pour le 2<sup>ème</sup> modèle la poutre discrétisée en éléments finis de dimensions 100 x100 x100 mm<sup>3</sup> le nombre des éléments dans ce cas égal à 750 éléments.

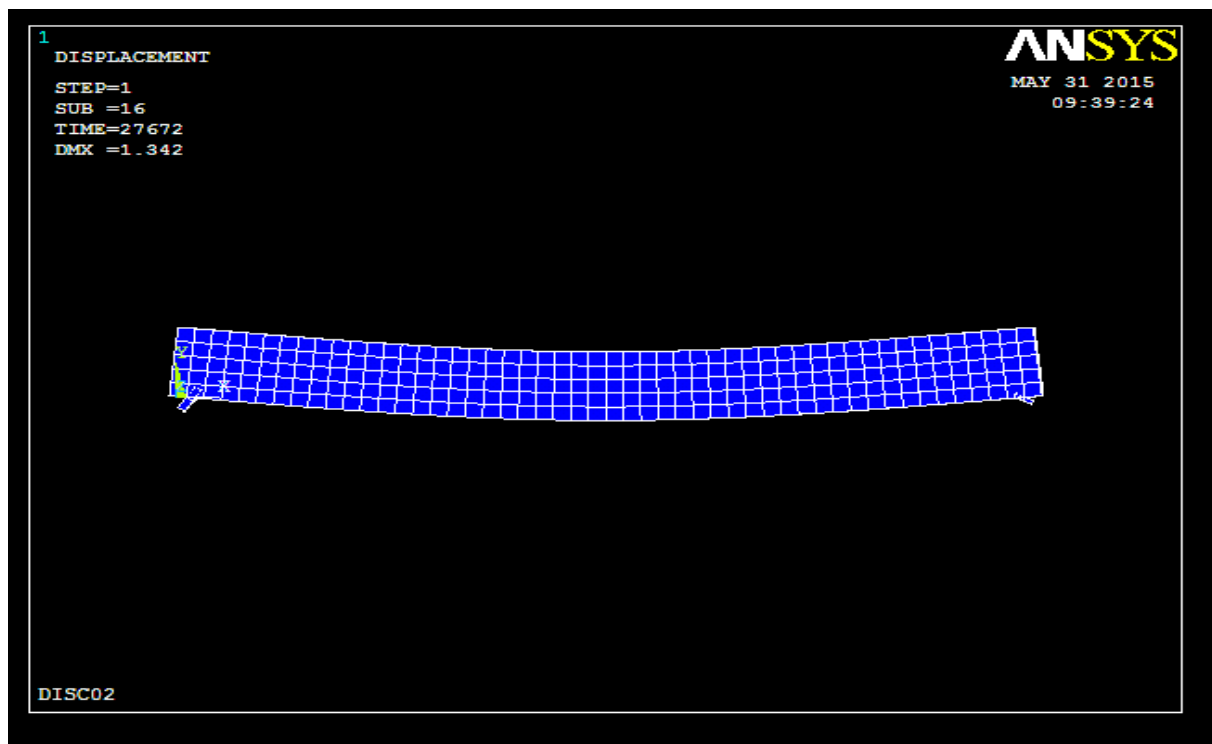


Fig V.3: la déformation de la poutre pour 2<sup>ème</sup> modèle de discrétisation.

## CHAPITRE V :INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS OBTENUS .

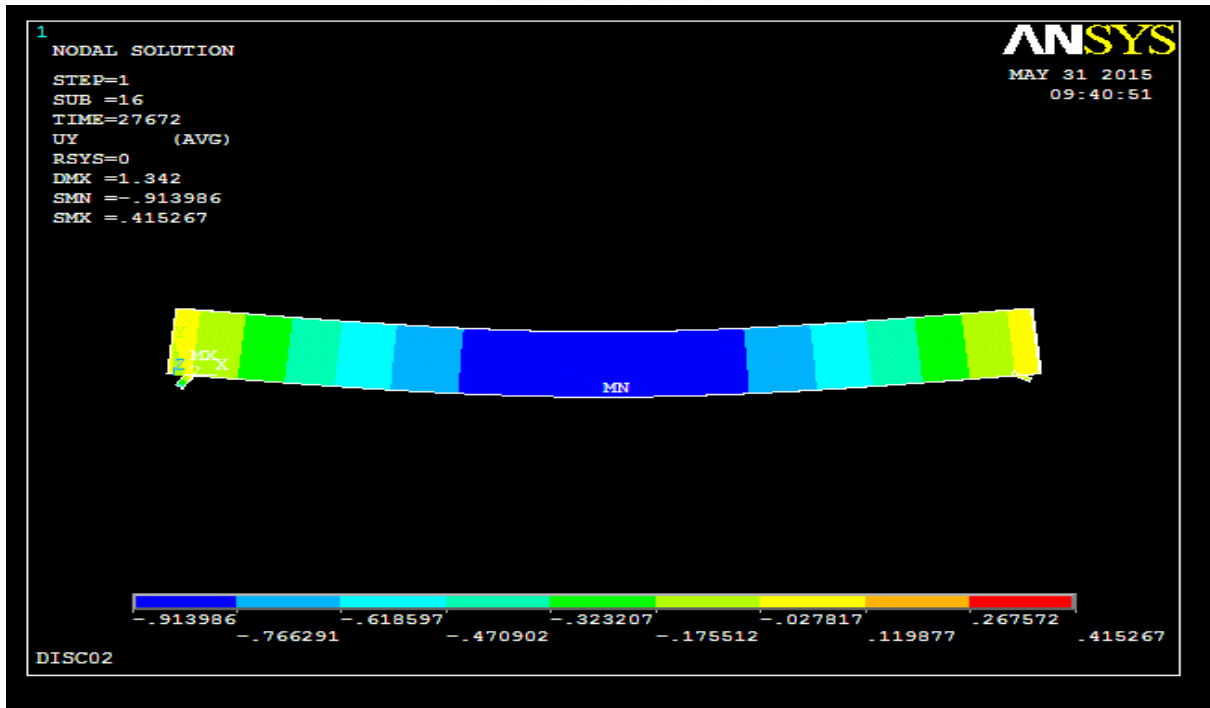


Fig V.4 : les contraintes de déformation de la poutre pour 2<sup>ème</sup> modèle de discrétisation.

N°	Dimensions			Nombre des éléments	Déformation (mm)	Contrainte de déformation Max (N /mm <sup>2</sup> )
	selon X (mm)	selon Y (mm)	selon Z (mm)			
Disc 01	50	50	50	6000	0.993152	0.028716
Disc 02	100	100	100	750	1.342	0.415267

Tableau V.1 : résultats de l'effet de discrétisation.

### V.2.1- Commentaire :

D'après le tableau V.1, On remarque que :

- La déformation et les contraintes de déformation de la poutre sont fonction de la discrétisation en éléments finis, plus la discrétisation est fine, plus les déformations et les contraintes de déformation subies sont petites.

## CHAPITRE V :INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS OBTENUS .

- 2) La variation des caractéristiques des matériaux ( $f_{ck}$ ) et nous avons étudié trois cas ,cette étude donne les résultats suivants :

a) 1<sup>er</sup> cas :

Pour l'étude de comportement matériel de la poutre nous avons proposé pour le 1<sup>er</sup> cas le caractéristique  $f_{ck}$  égal à **21 MPA** , on prend les résultats suivantes.

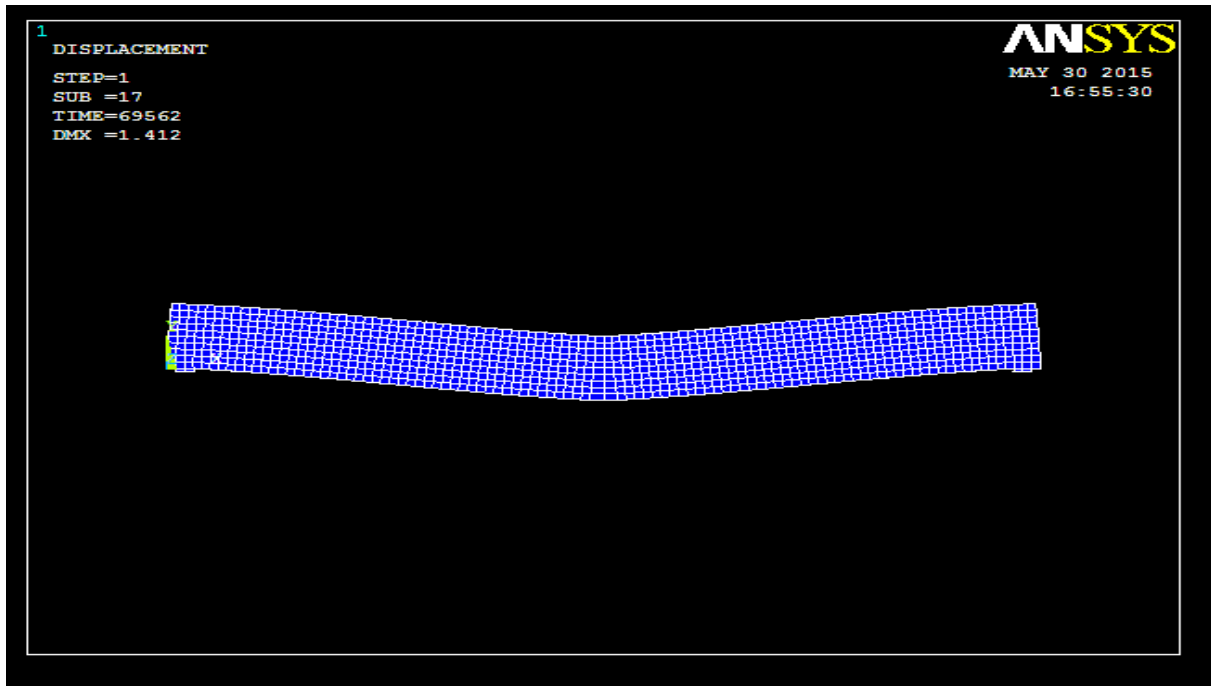


Fig V.5: la déformation de la poutre pour 1<sup>er</sup> cas.

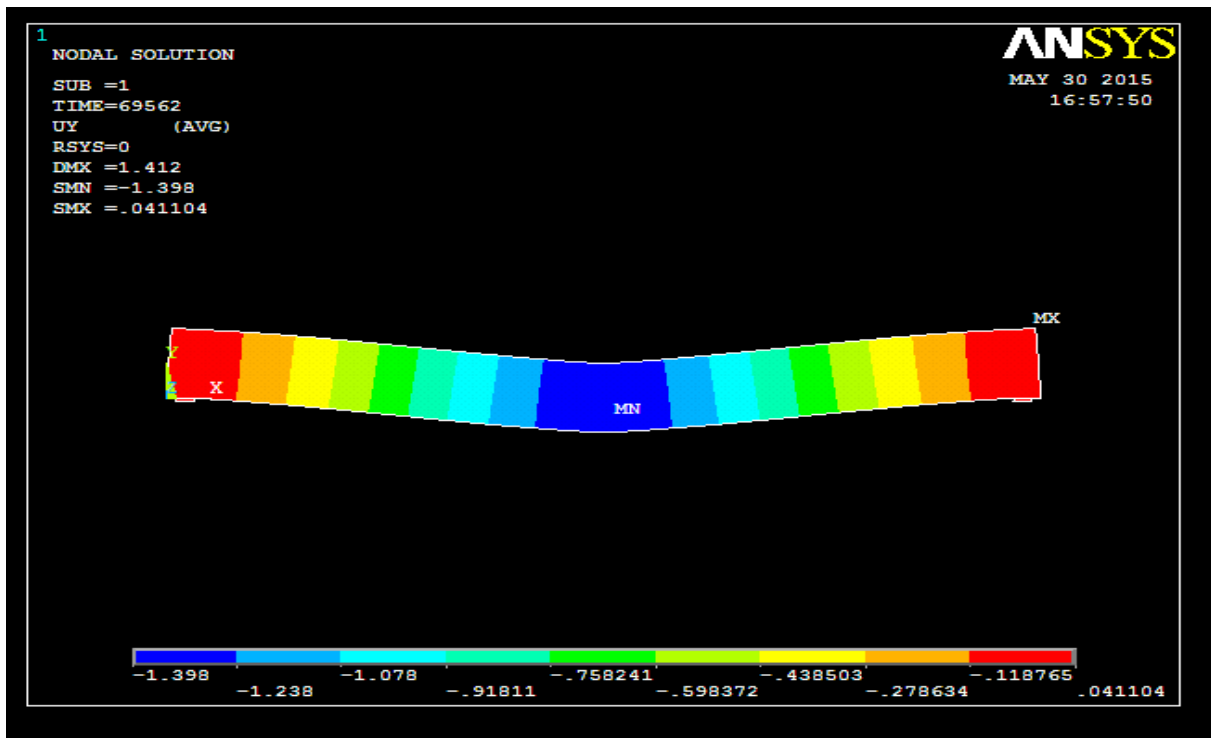


Fig V.6 : les contraintes de déformation de la poutre pour 1<sup>er</sup> cas.

## CHAPITRE V :INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS OBTENUS .

b) 2<sup>ème</sup> cas :

Nous avons proposé pour le 2<sup>ème</sup> cas le caractéristique  $f_{ck}$  égal à **25 MPA**, on prend les résultats suivants.

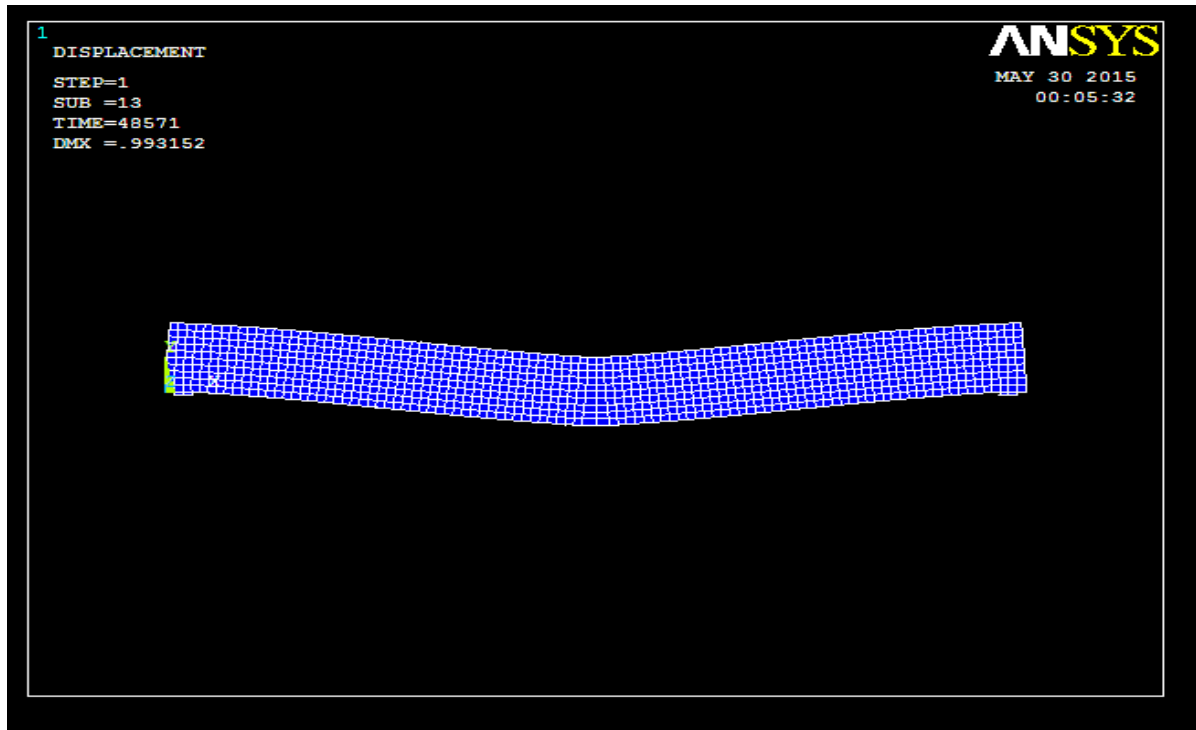


Fig V.7: la déformation de la poutre pour 2<sup>ème</sup> cas.

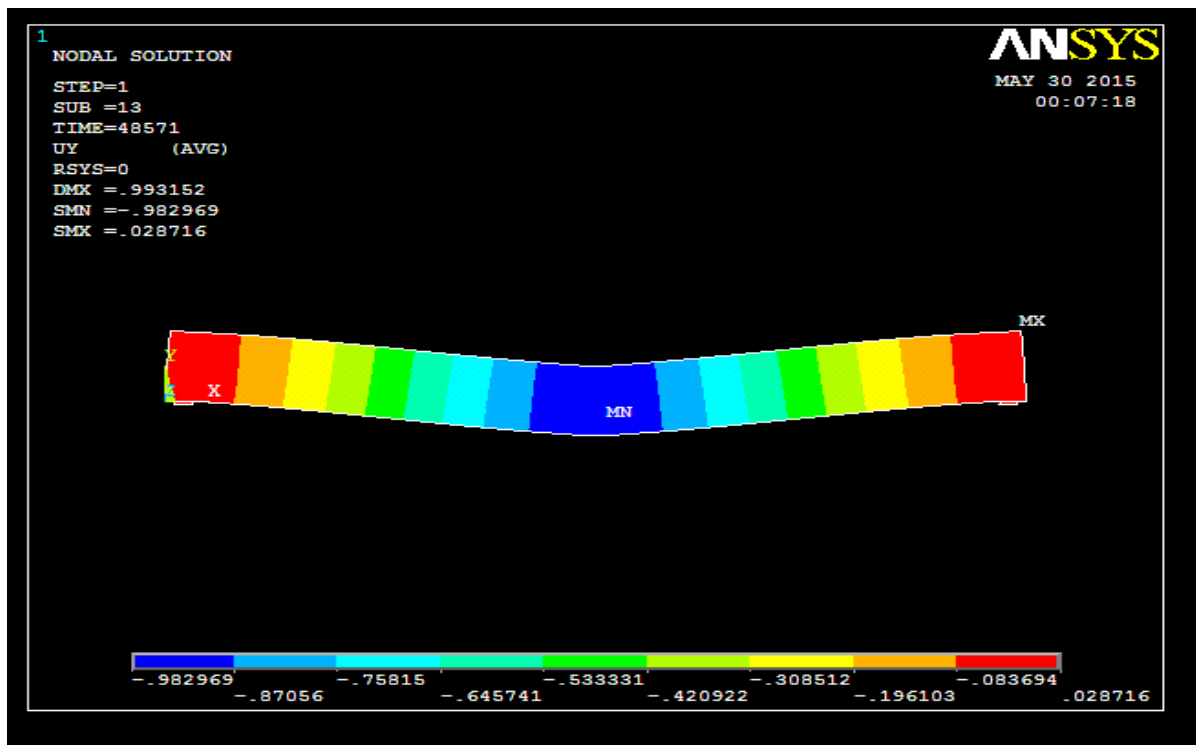


Fig V.8 : les contraintes de déformation de la poutre pour 2<sup>ème</sup> cas.



## CHAPITRE V :INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS OBTENUS .

c) 3<sup>ème</sup> cas :

Nous avons proposé pour le 3<sup>ème</sup> cas le caractéristique  $f_{ck}$  égal à **33 MPA**, on prend les résultats suivants.

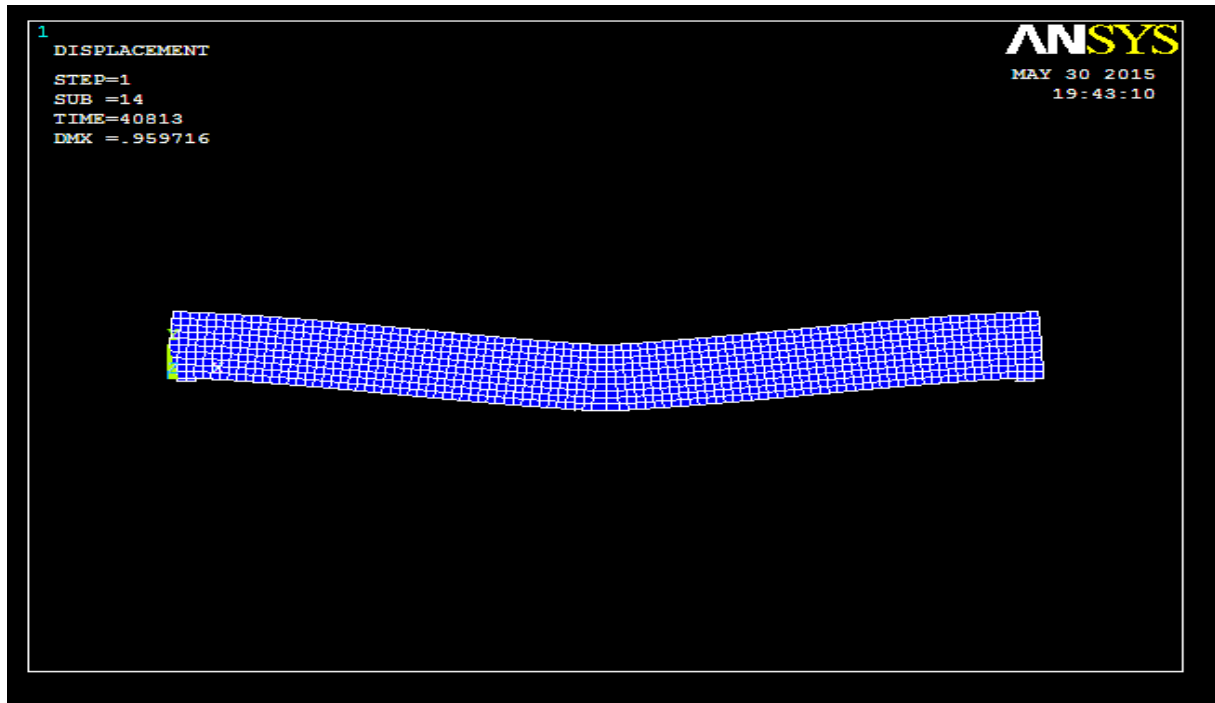


Fig V.9: la déformation de la poutre pour 3<sup>ème</sup> cas.

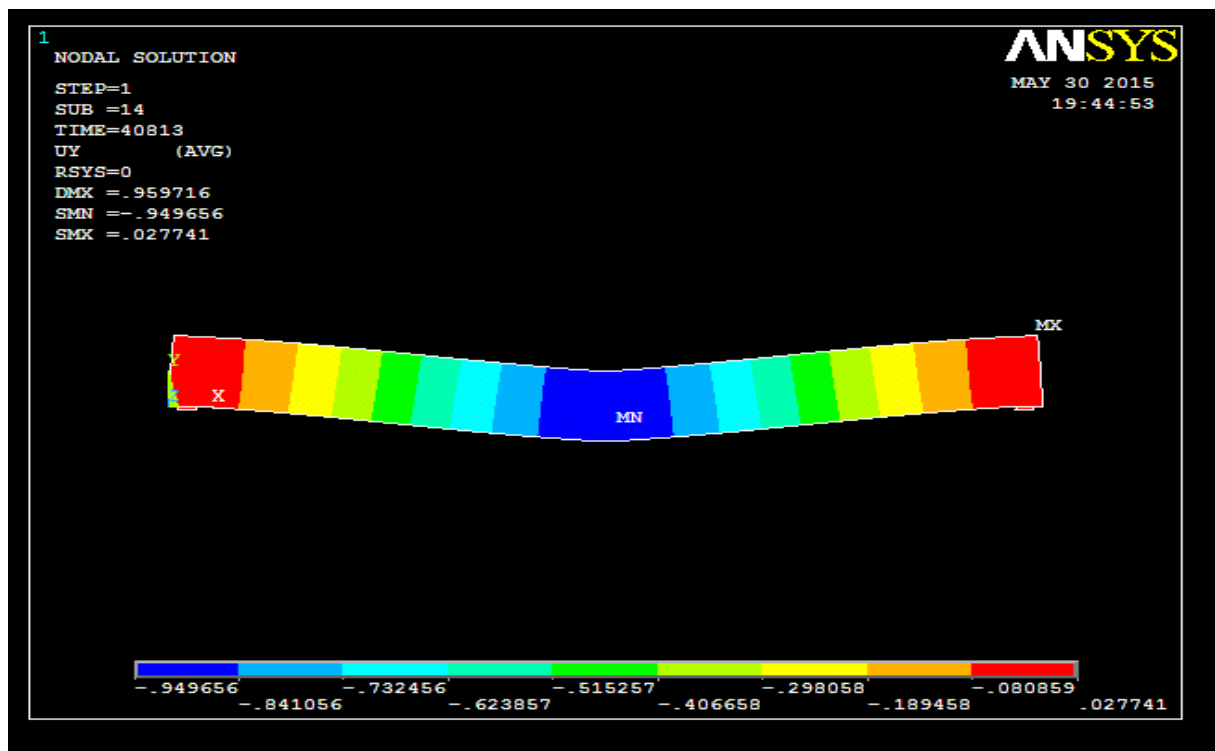


Fig V.10 : les contraintes de déformation de la poutre pour 3<sup>ème</sup> cas.

## CHAPITRE V :INTERPRÉTATION DES RÉSULTATS OBTENUS .

N°	$f_{ck}$ (MPa)	Déformation (mm)	Contrainte de déformation Max (N /mm <sup>2</sup> )
1 <sup>er</sup> cas	21	1.412	0 .041104
2 <sup>ème</sup> cas	25	0.993152	0.028716
3 <sup>ème</sup> cas	33	0.959716	0.027741

Tableau V.2 : résultats du comportement de la poutre en fonction de ( $f_{ck}$  ).

### V.2.2- Commentaire :

D'après le tableau V.2, On remarque que :

- la déformation et les contraintes de déformation augmentent proportionnellement avec l'amélioration de la résistance du béton à la compression ( $f_{ck}$ ).

# CONCLUSION GENERALE

## Conclusion générale :

Ce travail de fin d'étude avait pour objectif d'étudier l'effet de la discrétisation et la modélisation matériel sur le comportement d'une poutre en béton par la simulation d'un modèle tridimensionnel d'éléments finis.

Pour cela, comme point de départ, une large recherche bibliographique sur la méthode des éléments finis, la discrétisation et la modélisation.

Grace à cette recherche bibliographique, on a pu comprendre que :

La MEF est basée sur une idée simple : subdiviser (discrétiser) une forme complexe en un grand nombre de sous-domaines élémentaires de forme géométrique simple (éléments finis) interconnectés en des points appelés nœuds.

Ensuite, pour notre modèle la simulation a été effectuée par le moyen de logiciel ANSYS version 12, de manière à introduire la non linéarité matérielle du comportement de béton.

A partir de cette simulation on tire les conclusions suivantes :

- ✓ Le modèle numérique par éléments peut remplacer la procédure expérimentale qui est difficile et coûteuse.
- ✓ À l'aide du modèle numérique, on peut effectuer plusieurs études paramétriques pour mettre évidence l'influence de tous les paramètres importantes.

Le modèle numérique donne des résultats comme suit :

- La déformation et des contraintes de déformation de la poutre sont fonction de la discrétisation en éléments finis, plus la discrétisation est fine, plus les déformations et des contraintes de déformation subies sont petites.
- la déformation et les contraintes de déformation augmentent proportionnellement avec l'amélioration de la résistance du béton à la compression ( $f_{ck}$ ).

Enfin, d'un point vue personnel ce projet de fin d'étude a été l'occasion pour nous d'exploiter le logiciel de ANSYS d'approfondir mes connaissances dans le domaine des structures.

## RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUE

- [01]-**Z.Q.FENG, C.RENAUD, G.TURBELIN** : « MEF méthode des éléments finis » GM / L3 - ME6 ,UFR -S&T, Université d'Evry – Val d'Essonne, page 4.
- [02]- **Hervé Oudin** : « Méthode des éléments finis ». École d'ingénieur. École Centrale de Nantes, pp.63. <cel-00341772v1>, 2008, pages14-23
- [03]- **Hervé Oudin** : « Méthode des éléments finis »,page27-32.
- [04]- **AMOUR.A** : « cours de méthode des éléments finis »,pages1-2 .
- [05]- **Hervé Oudin** : « Méthode des éléments finis », page 3 .
- [06]- **Z.Q.FENG, C.RENAUD, G.TURBELIN** : « MEF méthode des éléments finis » GM / L3 - ME6 ,UFR -S&T, Université d'Evry – Val d'Essonne, page7 .
- [07]- **AMOUR.A** : « cours d'élasticité plane, fonction d'AIRY », page 1-5
- [08]- **MICHEL MAYA** : « mécanique des milieux continus »,2014, page
- [09]- **LIONEL GENDRE** : «Les bases de la simulation par éléments finis »,2013.
- [10]-**ANSYS inc** : «Introduction sur ANSYS » ,2015.
- [11]-**KAOUANE.M** : « Analyse des contraintes mécanique et de la fissuration des éléments en béton armé sous l'effet thermomécaniques »,2011,page 67
- [12]-**BELAZOUGUI .M ,BELAUGULM,BOUCEF.A** : CBA 93 « caractéristique des matériaux » , (A: 2-1-1-1), (A: 2-1-2-1), (A: 2-1-2-2),
- [13]-**ZEGHOUGH.S** : « modélisation par élément fini de l'essai (puch-out) avec un connecteur en I »,2011,page 46.

## Résumé :

Dans cette étude, on a fait un modèle d'élément fini tridimensionnel est présenté par l'utilisation d'un logiciel ANSYS pour simuler une poutre en béton.

L'objectif de ce travail est l'étude de l'effet de la discrétisation (le choix du maillage) et la modélisation matérielle (la variation de valeur du caractéristique  $f_{ck}$ ) sur le comportement d'une poutre en béton simplement appuyée par la méthode des éléments finis à l'aide d'un code industriel de modélisation et de calcul .

Les résultats de cette étude montrent que la déformation et les contraintes de déformation sont fonction de discrétisation en éléments finis, ces dernières augmentent proportionnellement avec l'amélioration de la résistance du béton à la compression ( $f_{ck}$ ).

**Mots clés :** simuler, discrétisation, modélisation, méthode des éléments finis, béton, poutre.

## Abstract :

In this study, we do a three- dimensional finite element model with plane stress elements is presented using ANSYS software to simulate the beam of concrete.

The objective of this work is the study of effect to the discretization (choice of the mesh) and the modeling material (the change a value of the characteristic  $f_{ck}$ ) the behavior of a simply supported concrete beam by the finite element method using an industrial code modeling and calculation.

The results of this study show that the deformation and deformation stresses are a function of discretization in the finite element recent increase in proportion to the improvement of strength of the concrete compression ( $f_{ck}$ ).

**Key words:** Simulate, discretization, modeling, finite element method, concrete, beam.

## ملخص:

في هذه الدراسة لقد تم انجاز نموذج ثلاثي الأبعاد لعنصر محدد باستخدام البرنامج ANSYS لأجل محاكاة روافد خرسانية .

(  $f_{ck}$  ) على سلوك الهدف من هذا العمل هو دراسة تأثير التفريد (اختيار التقسيم) والنمذجة للمواد (التغير في قيمة الميزة الروافد الخرسانية ذات مساند بسيطة بطريقة العناصر المحددة وذلك بمساعدة برنامج النمذجة والحساب .

نتائج هذه الدراسة تبين أن التشوه و ضغوط التشوه متناسبة مع التفريد إلى عناصر محددة وهذه الأخيرة تتزايد تناسبيا مع  $f_{ck}$  تحسين قوة ضغط الخرسانة

**الكلمات المفتاحية:** محاكاة, التفريد, النمذجة , طريقة العناصر المحددة, خرسانة, رافدة.